
UC-NRLF
$B 66 976

INHALT UND METHODE

DES

PLANIMETRISCHEN UNTERRICHTS.

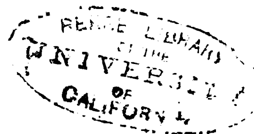
EINE VERGLEICHENDE PLANIMETRIE

VON

DR. HEINRICH SCHOTTEN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1890.



Vorrede.

Wenn man die reiche Literatur über Planimetrie aufmerksam verfolgt, so scheint es gar oft an ausreichenden Gründen für eine neue Erscheinung auf diesem Gebiete zu mangeln. Was die Verfasser veranlaſst hat, über all die früheren Lehrbücher hinwegzugehen und ein neues an deren Stelle setzen zu wollen, ist sicherlich wohl immer der Gedanke gewesen, Besseres zu bieten als das Vorhandene — obwohl bei einer groſsen Anzahl von Lehrbüchern dieser Gedanke sich nur deshalb dem Verfasser hat aufdrängen können, weil er offenbar mit seinen Vorgängern nicht hinreichend vertraut gewesen ist. Oft finden wir auch wirklich Gutes, aber im Ganzen doch nur so vereinzelt, daſs eine Berechtigung für ein ganz neues Buch nicht völlig vorhanden zu sein scheint.[1]) Dieser Mangel resultiert meiner Meinung nach daraus, daſs die Verfasser stets nur das fertige Produkt ihrer Arbeit darbieten, während eine Einsicht in die Entstehung des Textes und der Methode, eine kritische Besprechung und Übersicht der verschiedenen entgegenstehenden Meinungen und eine Begründung der eigenen Ansicht viel nützlicher gewesen wäre, wahrscheinlich aber auch sehr oft dahin geführt haben würde, das vorhandene Gute anzuerkennen und bestehen zu lassen.

Aus diesem Gedanken heraus ist das vorliegende Buch entstanden.

Es soll dazu dienen, rasch und sicher über die einschlägige Literatur sich orientieren und selbst nach den ausführlich gegebenen Zitaten aus den verschiedenartigsten Werken über einen bestimmten Gegenstand ein Urteil sich bilden zu können. Der Verfasser setzt dadurch den Leser in den Stand,

[1]) Derartige Verbesserungsvorschläge für einzelne Teile des Unterrichtsstoffes werden wohl am passendsten in Programmabhandlungen niedergelegt werden oder in Hoffmanns Zeitschrift, die ja gerade auf diesem Gebiete auch schon unendlich viel Gutes gewirkt hat.

den vorgetragenen Text selbst an der Hand des angeführten und kritisch beleuchteten Materials prüfen und für oder gegen denselben sich entscheiden zu können. Der Verfasser ist bemüht gewesen, das vorhandene Material möglichst vollständig herbeizuschaffen; dafs jedoch noch Lücken genug sich finden, kann nicht geleugnet werden, ist aber kaum zu vermeiden, besonders wenn man bedenkt, wie schwierig besonders die Programmabhandlungen früherer Jahrzehnte zu beschaffen sind. Ein sorgfältiges Namen- und Sachregister wird die Brauchbarkeit dieses Handbuches erhöhen und es zu einem Nachschlagebuch für alle Fragen auf dem Gebiete des planimetrischen Unterrichts machen.

Als Einleitung schickt Verfasser eine Studie über die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des planimetrischen Unterrichts voraus, die ebenfalls in zahlreichen Zitaten das Material bietet, das für die angeregten Fragen in Betracht kommt; die am Schlusse dieser Einleitung aufgestellten Thesen kennzeichnen den Standpunkt des Verfassers gegenüber diesen Reformbestrebungen. Vielleicht giebt diese Studie Veranlassung zu einer Arbeit über die Geschichte des planimetrischen Unterrichts in unserem Jahrhundert incl. dem letzten Drittel des vorigen. Jedenfalls würde die Darstellung der historischen Entwicklung nicht ohne Interesse sein und mehr als dies bisher möglich ist, den Zusammenhang zwischen den Fortschritten der Wissenschaften und denjenigen des Unterrichts erkennen lassen; ein Zusammenhang, der allerdings nicht überall zu Tage tritt, sondern nur in mittelbaren und deshalb auch nur schwer zu erkennenden Wirkungen sich äufsert.

Der vorliegende erste Band wird die Grundbegriffe behandeln und also vorwiegend auf dem mathematisch-philosophischen Grenzgebiete sich bewegen. Es leuchtet ein, dafs hier gerade bei der Feststellung der Grundbegriffe ganz besonders sorgfältig vorgegangen werden mufste und dafs das Zitaten-Material hier ein besonders reichhaltiges sein mufste. Übrigens wird die Diskussion der Grundbegriffe in diesem Bande noch nicht zu Ende gebracht werden. Eine Reihe von Fragen, die sich direkt an die vorliegenden Betrachtungen anschliessen, wird erst im folgenden Bande erörtert werden, der voraussichtlich bis zur Behandlung des Dreiecks sich erstrecken wird.

Über die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des planimetrischen Unterrichts.

(Die am Rand fettgedruckten Ziffern beziehen sich auf die Zitate am Schluſs dieser Studie.

Der Gegenstand, der hier behandelt werden soll, hat zwar teils in besonderen Werken, teils in den Fachzeitschriften und zahlreichen Programmen schon eine groſse Reihe von Bearbeitungen gefunden, es erscheint mir aber nicht unwesentlich, ehe ich an den speziellen Teil herangehe, meinen Standpunkt im allgemeinen — besonders gegenüber den Reformbestrebungen — klarzulegen.

Seit die Mathematik durch die Revision der Lehrpläne der höheren Lehranstalten eine gesicherte Stellung auch auf
dem Gymnasium gewonnen,[1-6]) waren die früheren Klagen **36**
über ihre Zurücksetzung im groſsen und ganzen verstummt,[7])
erst in neuerer Zeit tauchten die vergessen geglaubten wieder
auf. Im allgemeinen kann als feststehend angenommen werden,
daſs es sich dabei nur zum kleinsten Teile um den Umfang **139**
des mathematischen Lehrstoffes handelt,[8,9]) im wesentlichen **75**

1) Vgl. auch H. Z. [= Hoffmanns Zeitschr. für mathem. u. naturw. Unterr.] I p. 248 f.

2) Vgl. auch H. Z. II p. 46—57. — H. Z. II p. 138—146.

3) H. Z. II p. 74—81.

4) H. Z. VIII p. 459—474.

5) H. Z. XIII p. 148.

6) H. Z. XIII p. 410—416; p. 484—488.

7) Vgl. H. Z. I p. 1 ff.; 10 ff.; 68 ff.!

8) H. Z. I p. 173.

9) H. Z. III p. 551 in der Besprechung der Zieglerschen Geometrie durch Scherling.

35 betreffen die Klagen die Sicherheit des Besitzes;[1]) selbst die An-
128 kläger, die den höheren Lehranstalten in Universitätskreisen
33 erwachsen, verlangen keine Erweiterung der auf den Schulen
zu betreibenden Disziplinen.[2]) Ja, wenn ein solches Verlangen
an die Schule gestellt würde, so müfste meiner Meinung nach
demselben auf das ernsteste widerstanden werden, da im Auge
101 behalten werden mufs,[3]) dafs wir nicht zukünftige Mathema-
tiker heranbilden wollen und sollen — so wenig, wie die
höheren Schulen überhaupt zu einem bestimmten Berufe die
Grundlage legen sollen —, sondern dafs wir die uns anver-
traute Jugend geschickt machen, mit Erfolg ihrem selbst-
gewählten Berufe sich zu widmem, dafs wir ihr gleichsam
einen Teil des Rüstzeuges für den grofsen Kampf des Lebens
— im idealen Sinne des Wortes — liefern.

1 Die Zeiten, in denen das Märchen von einer besonderen
186 mathematischen Begabung eine grofse Rolle spielte, gehören
85 glücklicherweise zu den guten alten. Es ist das sicherlich die
98 Folge davon, dafs man sich von dem ehernen Hemmschuh,
86 der früher der mathematischen Methode anhing, frei zu machen
92 gewufst hat, dafs ein freierer Geist waltet. Wohl mag früher
198 diese Behauptung einer besonderen Begabung den Schein ihrer
126 Berechtigung gehabt haben, als die Mathematik in einer wenig
141 ansprechenden Weise vorgetragen wurde. Dafs aber gerade

---

[1]) Resolution der math.-naturw. Sektion der 33. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Gera: „Die mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion ist der Ansicht, dafs die Lehre von den Kegelschnitten auch auf Gymnasien und zwar in synthetischer Behandlung aufzunehmen sei — eine Methode, welche auch auf Realschulen mehr als bisher Berücksichtigung verdient.“ H. Z. X p. 76.

[2]) Man vergleiche weiter unten p. 31 und Anmerkungen dazu. Reidt, Anleitung § 19.

[3]) Vergl. hierzu Reidts Anleitung § 3, der mit den Worten schliefst: Es wird also als der wesentliche Zweck auch des mathematischen Schulunterrichts die Teilnahme an der allgemeinen Ausbildung der geistigen Kräfte des Schülers ohne besondere Rücksicht auf dessen künftige Berufswahl hingestellt werden müssen. —

Da an dieser Stelle Reidts Anleitung zuerst zitiert wird, so möge auch hier auf die Besprechung dieses Werkes in Rethwischs Jahresbericht II. B. p. 220 f. durch A. Thaer und in Hoffmanns Zeitschrift XIX p. 191—202 hingewiesen werden.

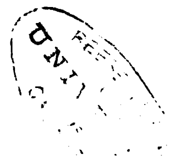
diese Art der Methode auch ihre begeisterten Anhänger ge- 137
funden, beweist der Ausspruch Kästners, daſs die Mathe- 151
matik um so unverständlicher werde[1]), je weiter sich ihre 129
Methoden von derjenigen Euklids entfernten. Jetzt hat man ein- 82
gesehen, daſs der mathematische Stoff, wie er auf der höheren 55
Schule geboten wird, gleichmäſsig dem Verständnis aller nahe 59
gebracht werden kann, danach aber auch die Forderungen ent- 3
sprechend geregelt. Ein Gebiet, das besonders dem erwähnten 27
Ausspruch Recht zu geben schien, war dasjenige der geome- 146
trischen Konstruktionsaufgabe. Wie mancher, der sich ver- 148
geblich gemüht, die Lösung zu finden, hat sich dabei beruhigt, 17
daſs er eben für dieses Fach nicht begabt sei. Gerade hier 87
ist aber auch ein bedeutender Fortschritt zu verzeichnen. 105
Nagel sagt in der Vorrede zu seiner geometrischen Analysis: 147
„Zugleich lag es in meiner Absicht, auch dem angehenden 81
Lehrer zu zeigen, daſs das Auffinden von Lösungen nicht, wie 125
manche meinen, eine bloſse Sache des Zufalls oder einer eigen- 133
tümlichen, nicht jedem gegebenen Geschicklichkeit sei, sondern 199
daſs auch diesen Übungen bestimmte allgemeine Regeln zu 56
grunde liegen.“ Erst in neuerer Zeit aber dürfte dieser Aus- 204
spruch sich allgemeiner Anerkennung zu erfreuen haben, da durch 44
das rastlose Streben der Lehrer der Mathematik gezeigt ist, daſs 45
jeder Schüler,[2]) der für andere Unterrichtsfächer veranlagt ist, 31
auch den von den Gymnasien gestellten Anforderungen in der Mathematik genügen kann. Ohne Überhebung kann wohl gesagt werden, daſs die Didaktik und Methodik in keiner der auf den höheren Schulen gelehrten Disziplinen in der letzten Zeit so bedeutende Fortschritte gemacht hat, wie gerade in der Mathematik.

Die gesetzliche Festsetzung des mathematischen Unter- 27
richtsstoffes erfolgte wohl auch deshalb, weil man erkannte, von welch hohem erzieherischen Werte der mathematische

[1]) Vergl. weiter unten.

[2]) Von neuen Aufgabensammlungen resp. Anweisungen zur Lösung seien nur erwähnt: Petersen, Hoffmann, Fischer, Lieber und Lühmann. Man vergl. die Rezension zu dem letzten der genannten in H. Z. I. p. 341. — Gandtner und Junghans rezensiert in H. Z. III. p. 389.

1*



Unterricht nach den verschiedensten Seiten hin ist. Abgesehen
88 von dem Vorteil, den er den mit ihm eng verknüpften und
87 verwandten Lehrfächern gewährt, zeigt sich sein Einflufs auch
91 noch in manchem Punkte, wo man ihn vielleicht nicht ver-
88 mutet.[1]) Und doch würden z. B. die Lehrer des Deutschen
alle Veranlassung haben[2-4]), dankbare Freunde der Mathe-
matik zu sein, denn sie ist es, die sie zum Teil vor dem ge-
fürchteten, überschwenglichen Phrasentum im Aufsatz schützt:
184 und noch mehr würden sie ihr zu verdanken haben, wenn alle
Lehrer der Mathematik das Wort beherzigen, jede Stunde
22 soll auch zugleich eine deutsche Stunde sein,[5,6]) denn gerade
82 im mathematischen Unterricht läfst sich eine Vollkommenheit
57 der Sprache in Hinsicht der Korrektheit und Folgerichtigkeit
102 erreichen,[7-9]) die von dem heilsamsten Einflufs auf das Denken
185 und die Sprache überhaupt sein mufs. Ich will mich beschei-
186 den, nur diesen äufseren Punkt berührt zu haben, ich mufste
188 es aber thun, da er ein Teil dessen ist, was ich für das Ziel
34 des mathematischen Unterrichts halte. Ich habe schon oben
gesagt und wiederhole es noch einmal, die Schule soll nicht eine Vorbereitung für künftige Mathematiker geben, sondern nicht weniger, wie durch ihren Inhalt, auch durch ihre Methode auf den Schüler einwirken, sie soll ihn nicht nur Mathematik

---

[1]) Vergl. hierzu Reidt Anleitung zu § 4 und § 9.

[2]) Vergl. hierzu Reidt Anleitung § 5.

[3]) Vergl. hierzu Reidt Anleitung § 17.

[4]) Oppel, Über den Einflufs des mathematischen Unterrichts auf sprachliche Bildung. H. Z. I. p. 394—417. — p. 443—468.

[5]) Vergl. Sturm, Über einige Inkorrektheiten, die sich in die Sprache besonders der elementaren Mathematik eingeschlichen haben.
H. Z. I. p. 272 f.

[6]) Vergl. J. C. Becker, Zu dem Kapitel von den Inkorrektheiten, die sich in die Sprache der Mathematik eingeschlichen haben.
H. Z. II. p. 89—97. — Ferner: H. Z. II. p. 209.

[7]) Hier mufs auch der Aufsatz erwähnt werden: Sickenberger, Mathematische Orthographie. H. Z. IV. p. 379—391, der sehr viel Beherzigenswertes enthält und zu zeigen geeignet ist, dafs eine sorgfältige Behandlung auch der Form der Mathematik (sit venia verbo) von der gröfsten Bedeutung ist.

[8]) Vergl. auch H. Z. XVIII. p. 113—118.

[9]) Vergl. H. Z. IX. p. 481. — 485—86.

lehren, sondern auch Anschauung, bewufstes richtiges Sehen, logisches Denken, genaues Sprechen und Schreiben. Schrader 9
geht sogar noch weiter, wenn er sagt,[1]) die Aufgabe ist nicht 99
Mathematik zu lehren, sondern durch Mathematik den Geist 84
zu bilden.

Es wird vielleicht befremden,[2]) wenn ich behaupte, die Mathematik oder genauer die Geometrie solle Anschauung lehren, man wird mir entgegenhalten, dafs vielmehr umgekehrt die Anschauung die Grundlage der Geometrie sei — und derselbe Gedanke wird einen vorwiegenden Platz in meinen späteren Ausführungen einnehmen; ich füge daher, um nicht mit mir selbst im Widerspruch zu scheinen, erklärend hinzu, die Schulung der Sinnesthätigkeit, durch Zeichnen und Naturbetrachtung begonnen, wird durch die Geometrie weitergeführt. Es besteht eine Wechselwirkung zwischen Geometrie und Anschauung. Diese geht vorher, aber sie wird durch die Geometrie geregelt. Anfänglich im propädeutischen Unterricht dienen die Figuren als erstes Mittel zur Weckung der inneren Anschauung, im wissenschaftlichen Unterricht dagegen nur zur Kontrolle oder zur Sicherung der inneren Anschauung. 48

Mit den erwähnten Vorzügen ist aber selbstverständlich die Bedeutung der Mathematik nicht erschöpft;[3]) es würde zu

---

[1]) Erziehungs- und Unterrichtslehre von Dr. W. Schrader. — [p. 524.]

[2]) Vergl. hierzu Reidt, Anleitung § 7.

[3]) Handbuch der praktischen Pädagogik von Dr. H. Schiller.

Schiller, p. 190. Nach einer Würdigung der Bedeutung der Mathematik für Naturwissenschaft, Geographie, physische Geographie und Astronomie fährt Schiller fort: „Die Bildung, welche die Mathematik selbst verleiht, bezieht sich zwar nicht ausschliefslich, aber doch vorwiegend auf die Verbindung der Vorstellungen durch das Denken ... — Man hat die Mathematik mit Recht „einen für sich fortentwickelten Zweig der Logik genannt; dadurch ist sie ganz besonders befähigt, dem Schüler das Wesen der verschiedenen Methoden formaler Untersuchung und logischen Denkens zuzuführen. Wenn sich dieselbe so vielfach mit dem Denkprozesse berührt, den auch die sprachliche Bildung in Bewegung setzt, so unterscheidet sie sich von diesem durch die streng logische Form, bei der es Ausnahmen, welche dem Gesetze sich nicht fügen, nicht geben kann, und die dadurch herbeigeführte Klarheit und Sicherheit.“ — Vergl. auch: Schellbach, Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien.

weit führen und mit dem eigentlichen Thema zu sehr auseinander liegen,[1]) wenn sie alle aufgezählt werden sollten. Aber eine Äufserung eines bekannten Mathematikers soll noch erwähnt werden. Er sagt, die Bedeutung der Mathematik als formalen Bildungsmittels ist überall anerkannt. Das Charakteristische des mathematischen Unterrichts ist aber nicht vorzugsweise die Wichtigkeit für die Verstandesbildung, vielmehr das Eigentümliche, dafs er früher und vielleicht auch intensiver die freie Selbstthätigkeit der Jugend zu fördern geeignet ist, als die meisten anderen Lehrgegenstände; darin liegt seine pädagogische Bedeutung.

Es wird dann hinzugefügt, dafs dies allerdings vorzugsweise von der Geometrie gelte — und so werden wir hinübergeführt zu der Frage: Sind die beiden Hauptzweige der Mathematik, Arithmetik und Geometrie, von gleichem pädagogischen Werte oder überwiegend einer derselben und in letzterem Falle welcher?

Ich habe ausdrücklich gesagt, von pädagogischem Werte, denn an und für sich dürfte diese Untersuchung müssig sein und es wird wohl niemand auch im Ernste daran denken, den Wert dieser beiden Disziplinen gegen einander abzuwägen. Aber etwas anderes ist es, wenn wir das Ziel ins Auge fassen, das dem mathematischen Unterrichte gesteckt ist, und die beiden Zweige darauf hin prüfen.

Unbestritten wird man vom pädagogischen Standpunkte der Geometrie den Vorzug geben müssen,[2, 3]) denn neben den Vorteilen formaler Verstandesbildung, die sie gleicherweise mit der Arithmetik gemein hat, zeichnet sie sich aus durch ihre Einwirkung auf das Anschauungsvermögen.

46 Geometrie übt den Schüler in der für die Wissenschaft

---

[1]) Vergl. die Anmerkungen zu Seite 4 u. 5.

[2]) Vergl. H. Z. XX. p. 388 (letzte Zeile).

[3]) Vergl. Reidt, Soll beim trigonometrischen Unterrichte das geometrische oder das arithmetische Prinzip vorherrschen? H. Z. VII. p. 1—12. Ferner: Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schul-Geometrie. H. Z. VII. p. 179. Erler, Das geometrische und das arithmetische Prinzip beim trigonometrischen Unterrichte. H. Z. VII. p. 435—439.

und das Leben äufserst wichtigen Anschauung der Raumverhältnisse, bietet also zugleich etwas bildendes und praktisches.

Ein gewichtiges Zeugnis für unsere Ansicht liegt vor von der „Sektion für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ auf der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner, die im Jahre 1885 zu Dessau abgehalten wurde.[1,2]) Direktor Dr. Gerhardt aus Eisleben sagte in seinem Vortrage, dafs die Geometrie einen höheren Bildungswert als die Arithmetik besitze, werde allgemein anerkannt. Werde sie der Hauptteil des mathematischen Unterrichtes, so erhalte der Schüler ein Bild von dem Zusammenhange einer Wissenschaft. Der Vortrag gipfelt in der These: „auf den Gymnasien ist vorzugsweise Geometrie zu lehren und nur so viel von Arithmetik und Algebra, als zum Verständnis jener notwendig ist.“

Auch Reidt äufsert sich ähnlich in H. Z. VII „über 13
Trig. Unterricht“. „Der Gebrauch analytischer Methoden ist, auch für den Lehrenden, sehr bequem. Die anscheinende Eleganz, die Leichtigkeit und Sicherheit ihrer Anwendung haben etwas Bestechendes, namentlich für jüngere Lehrer, die zudem oft durch ihre akademischen Studien zu einer Bevorzugung jener Methoden auch auf der Schule verleitet werden. Dem gegenüber mufs immer wieder ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dafs der Schwerpunkt des mathematischen Unterrichts, der ja keine praktischen Mathematiker bilden soll, in der anschaulicheren und die selbständige geistige Thätigkeit jüngerer Leute mehr anregenden Geometrie liegt. Die einseitige Herrschaft der Algebra, welche sich in den oberen Klassen unserer Schulen, wie es scheint, mehr und mehr einnistet, enthält eine grofse Gefahr für die pädagogischen Ziele und die Zukunft unseres Unterrichtsfaches.“

Zugleich mufs hervorgehoben werden, dafs beim geometrischen Unterricht die Gefahr geringer ist, dafs er ausartet in eine die technischen Operationen in den Vordergrund stellende Fachdressur, obwohl hier auch nicht geleugnet werden soll, dafs

---

[1]) Reidt p. 22.
[2]) Vergl. H. Z. XVI. p. 68—69.

58 durch eine allzugrofse Betonung der geometrischen Konstruktionsaufgabe eine ähnliche Gefahr wirklich heraufbeschworen werden kann; eine Gefahr, die allerdings bedeutend abgeschwächt ist durch die gerade auf diesem Gebiete gemachten Fortschritte, wie sie in verschiedenen geradezu hervorragenden Anleitungen zur Lösung planimetrischer Aufgaben zu erkennen sind.

Wird aber die gröfsere Bedeutung des geometrischen
131 Unterrichts anerkannt, so müssen auch Mittel und Wege geschaffen werden, demselben einen vorwiegenden Platz im Gebiete des Lehrplans zuzuweisen. In Süddeutschland hat man, so weit mir bekannt ist, dieser Anschauung Rechnung getragen, dadurch dafs der arithmetische Unterricht erst in der Sekunda beginnt.

112 Auch für uns wäre eine derartige Verschiebung des mathematischen Unterrichtsstoffes durchaus wünschenswert: [1]) wir

---

[1]) Deinhardt scheint in seinem Gymnasialunterricht dieselbe Ansicht zu vertreten. Es heifst (p. 141): „Der mathematische Unterricht gewinnt aber hierdurch auf dem Gymnasium drei Stufen, denn mit Geometrie mufs angefangen, mit der Arithmetik fortgefahren und mit der Trigonometrie geschlossen werden. Der Gegenstand der Geometrie fällt in die Anschauung und ist daher für den Anfang das Verständlichste. Die Arithmetik erfordert, da sie hier nicht mehr gewöhnliches Rechnen ist, sondern die allgemeinen Zahlen zu ihrem Gegenstande hat, einen viel höheren Grad von Abstraktion. Dieses Abstraktionsvermögen, das zur Auffassung der allgemeinen Zahl, ihrer Verbindungen und Eigenschaften nötig ist, wird durch das Studium der anschaulicheren Geometrie gewonnen."

„So wird man auch sonst aus den anschaulichen Lehren der Geometrie in die abstrakten Lehren der Arithmetik hinübergewiesen und der mathematische Unterricht ist nur dann gut und verständlich, wenn er aus der Anschauung der Raumgröfse in die Abstraktion der Zahlengröfse überführt."

„Er (der mathematische Unterricht) hat aber, wie aus dem bisher Gesagten hervorgeht, drei Stufen, die geometrische, die arithmetische und trigonometrische Stufe, und also auch drei Klassen, insofern jede Stufe durch eine besondere Klasse äufserlich dargestellt ist."

Es würde sich dies meiner Meinung nach, also mit meinem Vorschlag insofern decken, als die erste, die geometrische Stufe der Tertia, die zweite, die arithmetische Stufe der Sekunda zukommen würde, während in Prima durch die Vereinigung der beiden Zweige Vertiefung und

würden mehr Raum gewinnen für den geometrischen Unter- 183
richt und könnten denselben in Folge dessen intensiver er- 184
teilen,[1]) während andererseits das Mifsverhältnis zwischen Ka- 104
pazität und gebotenem Lernstoff beseitigt werden würde, das offenbar besteht und das in erster Linie dazu beigetragen hat,
das Interesse für Mathematik im späteren Leben schwinden 130
zu machen und so dem früheren Schüler einer höheren Lehranstalt einen Gegenstand überflüssig, ja abschreckend erscheinen 132
zu lassen, der ihm vom rein praktischen Gesichtspunkt allein 2
schon vom gröfsten Werte war, oder besser, gewesen sein sollte. 103
Wer die Schwierigkeiten kennt, zu jugendliche Köpfe ab- 16
straktes Rechnen zu lehren, der wird wahrlich zustimmen müssen.[2])

Aufserdem — und das müssen auch die begeisterten Freunde der Arithmetik zugeben — die Arithmetik ist, auch bei dem jetzigen Stande der Frage, in ihren Zielen beschränkt, es wird immer nur ein Teil derselben, ein sehr geringer Teil gelehrt werden können, während die Geometrie, wenn man ihr mehr Luft und Licht gewährt, zu einem vollkommenen Abschlufs gebracht werden kann. Es wird wohl auch nicht bestritten werden, dafs ganze Teile der Arithmetik rein handwerksmäfsig betrieben werden können, ohne dafs darunter das Ansehen der Arithmetik oder das Ziel des Unterrichts leidet. Als Beispiel möchte ich die Rechnung mit Logarithmen nennen.

---

wissenschaftliche Verknüpfung und Begründung den Inhalt des mathematischen Unterrichts ausmachen würden. Es heifst dann weiter: „Auf der geometrischen Stufe ist die Geometrie das überwiegende und den Charakter des Unterrichts bestimmende Element und die Arithmetik gehört nur insoweit herein, als sie sich unmittelbar an die geometrische Anschauung anknüpfen läfst."

Man vergleiche hierzu Reidt Anleitung § 20.

[1]) Man vergl. J. Kober, Über den Beginn des geometrischen Unterrichts. H. Z. XV. p. 105/6.

[2]) Dazu kommt noch ein hervorragender Grund, der sich infolge der neuen Schulordnung ergiebt. Da in Tertia jetzt das Griechische beginnt, würden wir in dieser Klasse mit zwei so schweren Gegenständen beginnen, wie es der Anfang der griechischen Sprache und die abstrakte Arithmetik für jugendliche Köpfe sind. Eins mufs weichen und das wird passend die Arithmetik sein, deren Anfang wir nach Sekunda verschieben.

Anderes wieder wird ganz unberücksichtigt bleiben können, wie das Ausziehen der Kubikwurzel etc. —

Gelingt es, der Überzeugung, dafs die Geometrie einen höheren Bildungswert als die Arithmetik besitzt, Geltung zu verschaffen, sei es durch späteren Anfang der Arithmetik überhaupt oder dadurch, dafs man die Geometrie durch Zuweisung einer gröfseren Stundenzahl — selbstverständlich von den jetzt zur Verfügung stehenden — bevorzugt,[1]) so wächst noch die Verpflichtung der mathematischen Lehrer, daran zu arbeiten,[2]) dafs der geometrische Unterricht immer mehr zu einem fruchtbringenden sich gestalte,[3]) dafs er nach Inhalt und Methode seiner hohen Bedeutung gemäfs ausgestaltet werde.

5 Mit einem gewissen Mitleid sind wir gewöhnt auf Eng-
155 land zu sehen, das noch immer im Elementarunterricht nach
167 den Elementen Euklids selbst unterrichtet, die doch gewifs
145 nach Euklids eigener Ansicht kein Lehrbuch sein sollten:
20 aber, wenn wir genauer nachsehen, so haben wir keine Be-
113 rechtigung dazu, denn es ist bei uns nicht viel anders mit
67 dem Unterricht in der Geometrie bestellt. Die grofsen Er-
152 rungenschaften des letzten Jahrhunderts auf dem Gebiete der
Geometrie sind an unseren Schulen fast spurlos vorüber-
118 gegangen, der Unterricht an den höheren Lehranstalten ist
von den Fortschritten genau genommen unberührt geblieben.[4])
Zwar wir unterrichten nicht mehr nach Euklid selbst, aber

[1]) Die Erweiterung der drei Lehrstunden in Unter- und Obertertia auf vier wöchentliche Stunden dürfte allerdings als höchst wünschenswert, ja notwendig bezeichnet werden. Der mathematische Unterricht würde aufserordentlich dadurch gewinnen.

Vergl. „Die Stellung der Mathematik und der Naturwissenschaften an unsern Gymnasien“ H. Z. XX. p. 241 ff., ferner H. Z. XX. p. 417 ff.

[2]) Vergl. Hoffmann, Zur Didaktik, 2) Wie ist eine regere Beteiligung der (math.-naturw.) Lehrer an didaktischen Fragen zu erreichen? H. Z. IX. p. 276—278.

[3]) E. Müller, Lehrzweck, Lehrbuch und Lehrmethode des geometrischen Unterrichts. — H. Z. II. p. 192—201.

[4]) v. Fischer-Benzon sagt in einer Besprechung von Diekmanns Übungen und Aufgaben für den propädeutischen Unterricht in der Geometrie: „Euklidische Geometrie im strengen Sinne des Wortes wird auf

was wir unterrichten, ist im wesentlichen Euklidsche Geo- 70
metrie,[1, 2]) insbesondere was die Methode betrifft. 168
Die Reihenfolge der Sätze war von Euklid allein nach 96
dem Gesichtspunkte gemacht,[3]) dafs jeder Satz sich aus dem 4
früheren mittelst streng-logischer Schlüsse ableiten lasse. Da- 109
bei war der Inhalt der Sätze so unbeachtet, dafs die wunder- 121
lichste Zusammenstellung erstanden ist. Daher wurde neuer- 127
dings [Mitte dieses Jahrhunderts ungefähr] mit Recht ein An- 72
fang gemacht, die Sätze so zu ordnen, dafs der Inhalt das 169
Prinzip der Einteilung bildete. Wenn behauptet wird, dafs
in Folge davon schon jetzt ein übersichtliches, systematisches 159
Ganze entstanden, so ist das wohl zu optimistisch geurteilt. Es bleibt auch ferner die Aufgabe der Verfasser geometrischer Lehrbücher,[4]) nicht nur an äufserer Ausbildung und innerer Befestigung eines feststehenden Ganzen zu arbeiten, sondern vielmehr ein systematisches Prinzip erst zu schaffen.[5])

---

deutschen Schulen schon lange nicht mehr getrieben, gehört auch gar nicht dahin, sondern auf die Universität. Denn reine Wissenschaft, namentlich so abstrakte Wissenschaft wie die in den Elementen Euklids enthaltene gehört nicht in eine Anstalt, die auf wissenschaftliche Studien vorbereiten soll." — H. Z. XVIII. p. 365.

[1]) H. Z. I. p. 216. — Hoffmann, Über schriftliche mathematische und naturwissenschaftliche Schülerarbeiten in höheren Lehranstalten.

[2]) Der Ausdruck Euklidsche Geometrie wird hier nicht in dem Sinne gebraucht, der die Bezeichnung Nicht-Euklidsche Geometrie veranlafst hat.

[3]) Man findet eine Besprechung der Euklidschen Geometrie auch in folgendem Werke: Dr. Carl Heinze, Kritische Beleuchtung der Euklidschen Geometrie. — Berlin 1876, das als Einleitung einer Elementargeometrie vorausgeht.

[4]) Man vergl. die Äufserung von Fischer-Benzon: „Für die Behandlung der Geometrie in der Schule ist in den letzten Jahren viel geschehen und es wird sicher noch einige Zeit darüber hingehen, bevor auch nur die wichtigsten methodischen Vorschläge und Verbesserungen verdaut und von der Mehrzahl angenommen sein werden. Es würde also wünschenswert sein, wenn in der Herausgabe von Lehrbüchern eine kleine Stockung eintreten möchte." H. Z. XV. in einer Kritik der Borthschen Aufgabensammlung.

[5]) Man vergleiche dazu die folgende Äufserung Beckers in seiner Reform des geometrischen Unterrichts: „Und wenn ich nun zurückblicke auf die ganze Danaidenarbeit und sehe, wie wenig die bahnbrechenden

Eine Würdigung der Bedeutung Euklids, wie seiner
158 Schwächen findet sich bei Drobisch (Logik):
157 „Man hat dem Euklid häufig Mangel an systematischer
106 Ordnung zum Vorwurf gemacht. Dies ist insofern begründet,
144 als bei ihm selbst eine Zusammenstellung der gleichartigen
Objekte der geometrischen Betrachtung, vielmehr noch eine
nach logischen Einteilungen geordnete Folge derselben vermifst wird, und in dieser Hinsicht seine Elemente keine Muster von logischer Anordnung der Begriffe sind, sondern diese sehr oft durcheinander geworfen erscheinen.“ Dagegen:

„Hinsichtlich der Strenge der Begründung ist die Euklidische Geometrie ein Muster von systematischer Anordnung.
80 Dagegen vernachlässigt sie in auffallender Weise die über-
sichtliche Aneinanderreihung der Materien, die sie, um der
ersteren Forderung zu genügen, oft zerstückelt, so dafs, aus
69 diesem Gesichtspunkte betrachtet, das Ganze einen ziemlich
buntscheckigen Anblick gewährt, ja von einer Zusammen-
schliefsung der Teile zu einem auch äufserlich geordneten
6 Ganzen kaum die Rede sein kann.“

160 Ähnlich äufsert sich Becker, wenn er sagt, bei Euklid
161 finde sich nur der Nachweis der Richtigkeit jeder Thesis,
ohne Darlegung des inneren Zusammenhangs der geometri-
189 schen Wahrheiten.

7 Bekannt ist die Ansicht Schopenhauers über Euklid
97 und seine Methode.[1])

162 Dem gegenüber ist der Ausspruch Kästners[2]) nicht zu

Leistungen eines Steiner und anderer Erweiterer der Wissenschaft und die deutlichen Winke einiger derselben von denjenigen begriffen und benutzt werden, deren Aufgabe die systematische Neubearbeitung des Lehrstoffes ist, so ......

[1]) Hoffmann, Schopenhauer, der Philosoph, über die Euklidsche Methode und die Mausefallenbeweise. H. Z. XVI. p. 105—107. — Ferner: Märtens, Schopenhauer über den „Mausefallenbeweis“. H. Z. XVI. p. 181—185.

[2]) Wie viel oder wie wenig man auf Kästners Ausspruch geben dürfe, hängt davon ab, wie viel oder wie wenig uns folgende Stelle aus Hankels akademischer Antrittsrede berechtigt erscheint:

..... bis sie von den fast noch dürftigeren Schriften eines Mannes abgelöst werden, der den Litteraturhistorikern als Epigrammendichter

unterdrücken: „Die neueren Werke der Geometrie verlieren umsomehr an Klarheit und Gründlichkeit, je weiter sie sich
von Euklid entfernen“ und nicht minder wichtig ist das Zu- 180
geständnis eines so bedeutenden Pädagogen, wie Siegmund Günther,[1]) dafs die spanischen Stiefel Euklidischer Methode ihre nicht zu unterschätzenden Vorteile beim Unterricht hätten. Aber es mögen auch noch andere wichtige Stimmen vernommen werden.[2])

Erler sagt bei der Besprechung der Behandlung der Elementargeometrie: Hier sind zwei Punkte ins Auge zu fassen,[3]) einmal die Auffindung und die Anordnung der geometrischen Wahrheiten, zweitens die Begründung oder die Beweise derselben. Man hat durch die Jahrhunderte hindurch nach dem Vorgang des Euklid über das Auffinden der Sätze selbst kein Wort verloren, sondern sie als gegeben angesehen und die Methode der Beweisführung beschränkt: dabei sind die einen synthetisch, die andern analytisch verfahren: wesentlich aber
heuristisch. Auf diese Zeit folgte ein Rückschlag und neuer- 200
dings (1860) die genetische Methode, die nicht ganz ohne Be-
rechtigung beansprucht, die allein naturgemäfse zu sein. 116

Trotzdem ist Erler aus verschiedenen Gründen gegen diese Methode, die aber im Laufe ihrer Entwicklung Euklid immer mehr in den Hintergrund gedrängt hat.

In der Vorrede zu seiner Planimetrie äufsert sich Spiecker:

---

wohl bekannt ist, von dem der Geschichtsschreiber der Mathematik aber kaum mehr zu sagen weifs, als dafs er Nichts geleistet hat. Ich spreche von Kästner, der seiner Zeit nicht nur als vorzüglicher Lehrer, sondern auch als Wunder eines Mathematikers galt und dessen überall verbreitete Lehrbücher trotz ihrer Gehaltlosigkeit und geschmacklosen Weitschweifigkeit von dienstbeflissenen Schülern noch mit Kommentaren versehen wurden, die fast einen bornierten Leser vorauszusetzen scheinen.

[1]) Günther in einer Besprechung der Schröderschen Planimetrie. H. Z. XIII. 300. „Man hat an der dogmatischen Darstellung und an ihrem vielleicht etwas schwerfälligen Rüstzeug von Lehrsatz, Zusatz, Aufgabe etc. mancherlei auszustellen gewufst und gewifs nicht ohne allen Grund; allein, je länger wir selbst im Lehrfach thätig sind, umsomehr haben wir uns überzeugt, dafs diese „spanischen Stiefel“ einen sehr hohen mnemotechnischen Wert besitzen.“

[2]) Man vergl. auch H. Z. XIV. p. 460 ff. und p. 510 ff.

[3]) Schmidts Encyklopädie II. p. 733.

„Den Anforderungen, welche an den geometrischen Unterricht gestellt werden,[1]) genügt ein synthetischer Vortrag der Euklidschen Geometrie weder hinsichts der Methode, noch dem Umfange der Kenntnisse nach. Dieser Unterricht soll sich intensiv zu einer Gymnastik des Geistes gestalten, welche die Denkkraft weckt und übt, und vorzüglich das Produktionsvermögen stärkt, indem er die Fruchtbarkeit eines streng methodischen Verfahrens zum Bewufstsein bringt (neben der Mitteilung von Anschauungen und Kenntnissen)."

Die mathematische Sektion der Schulmännerversammlung zu Leipzig (1872?) fafste den einstimmigen Beschlufs:[2]) „dafs der Weg des Euklid absolut zu verlassen ist und dafs dem Unterricht in der Geometrie vorausgehen mufs ein propädeutischer Unterricht, der von der Stereometrie ausgehend die Anschauung mittelst des Zeichnens übt." Vergl. dazu Herbarts ABC der Anschauung.

J. C. V. Hoffmanns Ansichten gehen aus folgenden Worten hervor:[3]) „Alle erfahrenen Lehrer der Mathematik werden mit mir wohl darin übereinstimmen, dafs die alte von Euklid ererbte dogmatische Methode des geometrischen Unterrichts, verbunden mit dem Umstande,[4]) dafs in unseren Schulen die

---

[1]) Spiecker, Lehrbuch der ebenen Geometrie. Potsdam, Stein. — Rezension desselben in H. Z. III. p. 173 f. und p. 499. „ganz besonders durch die Einflechtung der neueren Geometrie, welche hier mehr als in den meisten Lehrbüchern hervortritt, zeichnet sich dieses Werk vor vielen anderen aus und ist wegen dieser Vorzüge sehr zu empfehlen."

[2]) H. Z. III. p. 406—408.

[3]) H. Z. XI. p. 343—44 in dem Aufsatze: „Determinanten oder nicht? Eine Gefahr!"

[4]) Vergl. auch Hoffmann, Zur Reform des math. und naturwiss. Gymnasialunterrichts in Preufsen. H. Z. X. p. 184—190. — H. Z. X. p. 317—332. — H. Z. X. p. 401—406. — Besonders wichtig p. 330: „In der Mathematik sollte besonders die genetische (für die Schüler die heuristische) Methode empfohlen und angewandt werden, nicht aber die dogmatische; doch mache man die Schüler auch mit der letzteren bekannt und lasse sie den Unterschied und die Vorzüge und Nachteile beider Methoden selbst herausfühlen und finden. Vor Allem werde die Anschauung in den Dienst genommen; die Geometrie verlangt dies schon von selbst, während die Arithmetik vermöge ihrer abstrakten Natur die Anschauung viel nötiger bedarf, aber leider zu wenig in ihren Dienst nimmt."

wissenschaftliche Geometrie nicht durch einen propädeutischen Kursus vorbereitet wird, daſs vielmehr, selbst in Volksschulen,
verkehrter Weise die abstraktere Arithmetik der weit anschau- 206
licheren Geometrie vorangeht — für den mathematischen Unterricht verhängnisvoll geworden ist: denn diese Methode hat den früheren trostlosen Zustand dieses Unterrichtszweiges hervorgerufen. Namentlich aber hat sie den weit verbreiteten jetzt noch nicht ganz ausgerotteten Aberglauben erzeugt und genährt, daſs zur Mathematik besondere Anlagen gehörten. —

Hoffmann spricht sich dann ebenfalls für die genetische Methode aus.[1])

Zum Beweise dafür, daſs trotz so wohlbegründeter und 8
klar ausgesprochener Ansichten Euklids Methode noch vor- 40
herrsche, brauche ich nur auf die gangbarsten Lehrbücher der 150
Planimetrie hinzuweisen. Im besten Falle ist den bunt zu- 114
sammengewürfelten, ohne inneren Zusammenhang neben einan- 42
der gestellten Lehrsätzen ein Anhang hinzugefügt, der über die wichtigsten Resultate der neueren Geometrie einen kurzen Überblick gewährt. In diesem Sinne spricht sich auch Rausenberger in der Einleitung zu seiner bemerkenswerten Elementargeometrie aus, auf die ich mit ganz besonderem Nachdruck hinweisen möchte.[2]) Dieses Buch will kein Schulbuch sein, es giebt vielmehr eine wissenschaftliche Bearbeitung der Elementarmathematik, wie sie bis jetzt durchaus fehlte, so daſs hauptsächlich dieser Vernachlässigung der Elemente es zuzuschreiben ist, daſs die Fortschritte der Wissenschaft den elementaren Lehrbüchern überhaupt nur sehr wenig zugute gekommen sind.

Unter anderem sagt Rausenberger: „Die Elementargeometrie ist seit den Zeiten Euklids beträchtlich erweitert und vermehrt worden, und viele der neuen Sätze sind selbst in

---

[1]) Auch Trendelenburg verlangt in den Logischen Untersuchungen (1840) im zweiten Bande Seite 290 ff. die genetische Darstellung für die Mathematik und giebt im Pythagoräischen Lehrsatz eine Probe davon.

[2]) Besprochen von Schumacher in H. Z. XX. p. 517—521. Vollständiger Titel: Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt. Leipzig, Teubner.

Schulbücher übergegangen; allein sie erscheinen hier meistens nicht mit den alten Gegenständen zu einem einheitlichen Ganzen verbunden, sondern mehr äufserlich angefügt. Findet man doch nicht selten die Ansicht verbreitet, dafs die neuere Geometrie etwas Grundverschiedenes von der alten Euklidischen sei. Namentlich wird die sogenannte Geometrie der Lage in direkten Gegensatz zur alten Geometrie des Mafses gebracht. Und doch ist es an sich klar, dass es nur eine einzige Geometrie geben kann, deren Teile sich zu einem grofsen Ganzen zusammenfügen.

Ist aber unsere Elementargeometrie ein einheitliches Ganzes? Ist sie nicht vielmehr ein Konglomerat einzelner Sätze und Sätzchen, von denen sich wohl manche zu Gruppen vereinigen, die aber zum Teil auch recht äufserlich zusammengestellt sind?"

Und an einer anderen Stelle derselben Einleitung wird gesagt: „Die Darstellung hat ihre Richtung zu sehr auf spezielle Eigenschaften und Figuren von besonderem Charakter genommen und verliert hierdurch die Allgemeinheit vielfach aus den Augen."

Denselben Gedanken finden wir auch in einer Rede Han-
106 kels,[1] die er beim Eintritt in den akademischen Senat zu Tübingen über die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten gehalten hat, wie in der Vorrede zu seiner projektivischen Geometrie.

Reidt, der diese Stelle auch in seiner Anleitung zum mathematischen Unterricht mitteilt,[2] fügt hinzu: „Diese Worte kennzeichnen vortrefflich den Gegensatz zwischen der alten und neuen Methode, und es ist sehr leicht zu verstehen, wenn die Kenner der letzteren in Begeisterung für dieselbe den Wunsch hegen, die gewaltigen und unbestrittenen wissenschaftlichen Vorzüge derselben auch dem Schulunterricht zu teil werden zu lassen."

Dafs trotzdem eine plötzliche Änderung der Methode nicht

---

[1]) Dr. H. Hankel, die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. — Tübingen, Fues.

[2]) Dr. Fr. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht. — Berlin, Grote. — [p. 178.]

am Platze,[1]) ist von vielen Seiten ausgesprochen. In jugendlicher Begeisterung für die geistreiche Auffassung fühlt man sich versucht,[2]) das Alte völlig über Bord zu werfen und den geometrischen Unterricht in der Schule ganz nach Steiners Art zu betreiben. Aber die neue Methode hat sich nirgends erhalten, selbst die bezüglichen, zum Teil vorzüglichen Schulbücher haben wenig Glück gehabt: ein wenig pädagogisches Studium oder Erfahrung genügte, die schwache Seite zu erkennen. Wenn auch nicht so schroff, urteilen doch viele in 140
gleicher Weise.

„Es möchte sich also empfehlen,[3]) ohne gerade das System der neueren Geometrie als solches aufzunehmen,[4]) doch im Geiste derselben zu unterrichten,“ sagt Kober.

„Im Unterrichte der Elementargeometrie bleibt die Euklidische Geometrie dem System nach bestehen,[5]) wird aber im Geiste der neueren Geometrie reformiert. Die Sektion begrüfst mit grofser Freude die von Dr. Hubert Müller in dieser Hinsicht eingeleiteten Schritte.“

Auch Reidt verschweigt a. a. O. nicht, dafs der gewünschten Neuerung gewichtige Bedenken entgegenstehen, ebenso wie Rausenberger a. a. O. die Schwierigkeiten hervorhebt, die in der Benutzung zweier Fundamentallinien, der Geraden und des Kreises, der als solcher für sich und nicht als Kegelschnitt in die Schulgeometrie gehöre, entständen. Rausenberger erklärt ausdrücklich, dafs er eine Geometrie, aus der der Kreis verbannt ist, als gänzlich ungeeignet für den Unterricht in den mittleren Klassen höherer Lehranstalten ansieht. Dieser letztere Umstand scheint ihm neben der schon

---

[1]) A. Ziegler, Thesen zu dem Streite über geometrischen Unterricht. H. Z. III. p. 184—196.

[2]) Vergl. auch: Schwering, Aufgabe und Anschauung. — Progr. Coesfeld, 1889.

[3]) Vergl. die Rezension von: Hartmann, Genetischer Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie durch J. Kober; H. Z. IV. p. 286—291.

[4]) J. Kober, Über das Unendliche und die neuere Geometrie. H. Z. III. p. 249—264.

[5]) Resolution der mathematischen Sektion der 31. Philologen-Versammlung.

erwähnten der Einheitlichkeit der Elementargeometrie sich hindernd in den Weg zu stellen.

Das Buch Rausenbergers selbst bedeutet aber einen wesentlichen Fortschritt auf dem Gebiete der systematischen Elementargeometrie, obwohl es direkt zur Benutzung als Schulbuch allerdings nicht geeignet erscheint, so z. B. § 9, der sich mit dem Parallelentheorem beschäftigt.

Eine Anregung zur Erörterung der Frage nach der Einführung der Anschauungsweisen und der Methoden der sogenannten neueren Geometrie gab unter anderm eine 1872 in Zarnckes Lit. Zentralblatt veröffentlichte Rezension eines geometrischen Lehrbuches durch die Bemerkung:[1, 2]) „und doch dürfte nur eine wesentlich von der bisherigen abweichende und dieselbe verbessernde Darstellung der Elementargeometrie es rechtfertigen, dafs zu der grofsen Zahl geometrischer Elementarbücher, welche die deutsche Literatur aufzuweisen hat, noch ein neues hinzukommt. Das Bedürfnis einer solchen Umgestaltung der Elemente hat sich schon längst fühlbar gemacht. Es ist eine systematische Verarbeitung dieser Lehren nötig, es genügt nicht, nach Art unseres Verfassers und anderer Schriftsteller vor ihm, anhangsweise die Lehre von der harmonischen Teilung etc. mit aufzunehmen."

Im Anschlufs hieran sagt z. B. V. Schlegel: „Es könnte in Verwunderung setzen, dafs die gewaltigen Reformen Steiners so ganz spurlos an dem auf der Schule behandelten geometrischen Stoffe vorübergegangen sind,[3]) wenn man sich nicht vergegenwärtigen müfste, dafs eben bisher kaum etwas geschehen ist, um den grofsen Grundgedanken Steiners: die Einordnung aller geometrischen Wahrheiten in ein den Verstand befriedigendes System, auch für die Elemente der Geometrie fruchtbar zu machen."

---

[1]) Man vergleiche hierzu die ersten Bände der Hoffmannschen Zeitschrift (aus den Jahren 1870 u. 71), deren bezügliche Artikel aus andern Stellen der vorliegenden Arbeit zitiert sind.

Ferner: H. Z. III. p. 93 (Briefkasten).

[2]) Zarnckes „Literarisches Zentralblatt" Jahrgang 1872. Nr. 3 Besprechung eines Lehrbuches der Geometrie durch E. Müller.

[3]) Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schul-Geometrie. — H. Z. VII p. 179—84.

An einer anderen Stelle sagt er:[1]) „So sehen wir denn die Geometrie der Schule wesentlich zurückgeblieben hinter den Anforderungen der Zeit. Während die Lehrbücher nach wie vor das alte Thema der Kongruenzsätze variieren, finden die Lehren der neueren Geometrie, weil sie eben dem veralteten Rahmen unmöglich eingepafst werden können, höchstens in Anhängen eine Stelle.“

Der ganze Aufsatz,[2]) aus dem die vorliegende Stelle entnommen ist, ist für die behandelte Frage so wichtig und enthält so viel Gutes, dafs er eigentlich vollständig hier reproduziert werden müfste. Wir müssen uns genügen lassen, mit Nachdruck auf denselben hingewiesen zu haben. —

Der Vorwurf Schlegels, dafs für die neuere Geometrie im Elementarunterricht wenig oder nichts geleistet worden, trifft in erster Linie die Gelehrten, die ganz in Anspruch genommen durch die höhere Mathematik nicht Zeit und Lust haben, sich mit Elementarmathematik zu beschäftigen.

Es würde kein gutes Licht auf die Lehrer der Mathematik an höheren Schulen werfen, wenn auch sie dieser Vorwurf träfe, wenn dieser Satz auch noch jetzt seine Gültigkeit hätte.

Von den verschiedensten Seiten ist der Versuch gemacht worden, — es liegen bereits eine stattliche Anzahl von Lehrbüchern vor — die Elemente in dem geforderten Sinne umzuarbeiten, unter denen diejenigen von Schlegel selbst, von H. Müller, Kruse, J. K. Becker, Worpitzky, Henrici und Treutlein besonderer Erwähnung wert erscheinen, denen sich das schon genannte von Rausenberger anschliefst. 10

Auch der Versuch des Professor Fresenius in Frankfurt a. M.,[3]) die Kongruenzsätze im Zusammenhang durch

[1]) H. Z. VII p. 182 vergl. auch p. 183: „Dagegen wird eine auf neuen Grundlagen beruhende Darstellung der Geometrie den Unterricht voraussichtlich in dem Grade erleichtern, dafs er auch die einfacheren Lehren der neueren Geometrie in gebührender Weise wird berücksichtigen können, ohne mehr Zeit in Anspruch zu nehmen als bisher.“

[2]) Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schulgeometrie. — H. Z. VII. p. 179—184.

[3]) J. K. Becker bemerkt allerdings in einer Anmerkung seiner Reform des geometrischen Unterrichts: „Ist es auch schwer, besonders

49 symmetrische Lage zu lehren, mufs hier genannt und als besonders gelungen bezeichnet werden. Solche,[1,2]) einzelne Gebiete der Elementargeometrie behandelnde Arbeiten werden am besten eine einheitliche Gestaltung des Ganzen vorbereiten.[3]) Denselben Gegenstand behandelt auch ein Aufsatz von Dr. H. Müller in Hoffmanns Zeitschrift,[4]) betitelt „Schulgemäfse Behandlung der Symmetrielehre", der aufserordentlich viel Beherzigenswertes enthält und keinem Lehrer der Mathematik unbekannt sein sollte.

119 Aber die Abfassung von Lehrbüchern scheint im grofsen und ganzen der Gipfel der Erfolge gewesen zu sein,[5]) denn die Einführung in den Unterricht hat sich, soweit mir be-

---

in einem Schulbuche für Tertianer seinen (v. Staudt) Anforderungen ganz gerecht zu werden, so mufs man doch darüber stutzig werden, auch seinen Hinweis auf die Alles durchdringenden Gesetze der Symmetrie so ganz unbeachtet zu sehen, dafs noch nach 24 Jahren ein Frankfurter Pädagoge (Fresenius) die Verwertung derselben für die Geometrie als etwas Neues empfehlen konnte." — Das Urteil erscheint etwas scharf: denn, wenn auch die Anregung von v. Staudt ausging, so war es doch Fresenius, der sie benutzte und der Schule dadurch einen wichtigen Dienst leistete. — Wer kennt denn jetzt nach 18 Jahren die Arbeit Fresenius'? Das Prinzip der Symmetrie ist doch wohl auch älter, als hier angenommen.

[1]) Fresenius, die Lehre von der Kongruenz der Dreiecke und Zugehöriges in eine neue Fassung gebracht. — H. Z. II. p. 1—14.

Ferner: H. Z. II. p. 210. — Ferner: Fresenius, Die Raumlehre eine Grammatik der Natur, besprochen in H. Z. VII. p. 64—67 durch Sickenberger.

[2]) Vergl. F. Meyer, Über die Behandlung planimetrischer Aufgaben durch Schüler. H. Z. XVI. p. 91—104.

[3]) Auch Schlegels Bemühungen um die Grassmannsche Ausdehnungslehre seien hier erwähnt. — Vergl. Schlegel, Proben aus einer neuen auf der Grassmannschen Ausdehnungslehre fufsenden Bearbeitung der Elementar-Mathematik. — H. Z. II. p. 308f. Schlegel, System der Raumlehre. Leipzig 1872.

[4]) Vergl.: H. Müller, Schulgemäfse Behandlung der Symmetrielehre. H. Z. VII. p. 169—178. p. 257—265.

[5]) Hubert Müller sagt also ganz richtig in der Einleitung zu seinen Elementen der Planimetrie, „dafs er sein Buch auf die Gefahr hin verfafst hat, dafs die Abweichungen von dem Üblichen dem Buche den Weg in die Schulen versperren sollten."

Zitiert nach H. Z. XVII. p. 608.

kannt, noch nicht vollzogen, und Kambly und Koppe beherrschen nach wie vor den geometrischen Markt,[1-3]) obwohl gerade in diesen Lehrbüchern die erwähnten Nachteile sich in hervorragendem Maſse geltend machen, besonders da sie allzusehr Schulbücher sind. In Bezug auf die Korrektheit der Sprache z. B. können sie als Muster gelten, wie es nicht sein soll.[4])

---

[1]) Selbst das vortreffliche Lehrbuch von Dr. Hub. Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen, hat erst 1889, also 15 Jahre nach seinem Erscheinen die dritte Auflage erlebt; in der Rezension der 1. Auflage von Scherling heiſst es: „Die Auswahl aus dem groſsen Schatze der neueren Geometrie für den Schulunterricht ist keine kleine Arbeit. Der Verf. scheint uns überall das Rechte getroffen zu haben, um bei aufgeweckten und strebsamen Schülern das Interesse an der Geometrie zu wecken und zu heben, und indem wir das vorliegende Werk nochmals der Beachtung der Lehrer der Mathematik auf das Wärmste empfehlen, schlieſsen wir uns dem Urteile des sel. Prof. Clebsch über das Manuskript desselben an, der eine Umbildung vieler Teile der in den Schulen gelehrten Geometrie an der Hand der neueren Geometrie für ein Bedürfnis der Zeit erklärte, und den vorliegenden Leitfaden als eine willkommene Gabe für die Schule betrachtete . . . .“ — Vergl. H. Z. V. p. 449—474. — Dieses eine Beispiel möge genügen. Wie viel Auflagen hat in gleicher Zeit Kamblys Planimetrie erlebt, die 1884 in 74. Auflage erschien? — Vergl. auch: H. Z. VI. p. 232—236. — H. Z. VII. p. 70—73. — H. Z. IX. p. 447—452.

[2]) Schlegel giebt in H. Z. XI p. 185 eine vergleichende Tabelle der eingeführten Lehrbücher, der wir folgendes entnehmen: Kamblys mathematische Lehrbücher sind an 217 Anstalten eingeführt, dann folgt Koppe an 51 Anstalten, Mehler an 44, Reidt an 29, während es 55 mathematische Lehrbücher giebt, die nur an je 1 Anstalt in Gebrauch sind. — Schlegel fügt hinzu: „Daſs die Qualität der meistverbreiteten Bücher einen Schluſs auf die im allgemeinen erreichte wissenschaftliche Höhe des Unterrichts in dem betr. Fache gestatten wird.“

[3]) H. Z. XI. p. 2.

[4]) Beispiele hierzu auch in H. Z. V. p. 276 von Reidt angegeben. Vergl. Dr. Ohrtmanns Kritik der Kamblyschen Elementarmathematik und des Verfassers Entgegnung in H. Z. VII. p. 449 und die sich daran anschlieſsenden günstigen Beurteilungen. — Vergl. ferner Kolbes scharfe Rezension in der neuen österr. Zeitschrift für Realschulen. — Desgl. Dr. H. Bolze in H. Z. IX. 190, der Kambly Leichtfertigkeit und mangelnde Logik vorwirft. § 27 wird als sensationelles Beispiel erwähnt, der Beweis für die Gleichheit der Basiswinkel als unmathematisch zurückgewiesen. — H. Z. IX. 319 findet sich noch folgende Anmerkung: Zu

Verfolgt man die Bestrebungen aufmerksam, so ist aber deutlich, dafs das Alte sich überlebt hat,[1,2]) dafs dessen Unzulänglichkeit, ja Schädlichkeit erkannt ist und dafs etwas Neues an seine Stelle treten mufs.

188 Nun ist die grofse Frage,[3,4]) Reform oder neuere Geo-
190 metrie? Es scheint aus all den angeführten Äufserungen und
122 Thatsachen hervorzugehen,[5]) dafs eine Revolution zu gunsten
203 der neueren Geometrie ohne Erfolg verlaufen würde. — Es
darf jedoch nicht unerwähnt bleiben, dafs Versuche mit neuerer Geometrie teilweise schon angestellt sind,[6]) besonders in Österreich, wo auf dem Gebiete der darstellenden Geometrie Ausgezeichnetes geleistet wird. —

Dagegen mufs entschieden eine Reform des geometrischen Elementarunterichts gefordert werden in dem Sinne,[7]) dafs die neueren Methoden, insofern sie das Verständnis und die Einsicht nicht erschweren, sondern erleichtern, und insofern als sie gröfsere Anschaulichkeit und natürlichere Beweisführung gewähren, dem geometrischen Elementarunterrichte dienstbar gemacht werden.

„Nachdem die Methodik zur Erleichterung wesentlich beigetragen,[8]) den Stoff zusammengezogen hat, ist es möglich, auch aus der neueren Geometrie einzelne Partieen aufzunehmen, was sich ebensowohl wegen der Eigentümlichkeit und All-

---

den Rezensionen von Kambly. Auch in den Blättern für das bairische Gymnasial- und Realschulwesen ist in Bd. XIII. Heft 3 eine abfällige Rezension des obengenannten Buches enthalten.

[1]) Vergl. hierzu Reidt Anleitung § 43 und § 44.

[2]) Vergl. die Rezension von: Stoll, Anfangsgründe der neueren Geometrie für die oberen Klassen etc. — in H. Z. III. p. 488—495.

[3]) Vergl. Sturm, Die neuere Geometrie auf der Schule.
H. Z. I. p. 474—490. — Ferner: H. Z. II. p. 391—409. — H. Z. II. p. 494 ff. H. Z. III. p. 11 f. — p. 249—264. — 265.

[4]) Vergl. H. Z. XIV. p. 73.

[5]) Vergl. H. Z. XVIII. p. 58.

[6]) Vergl. auch: H. Z. II. p. 228—239.

[7]) Vergl. die Rezension der Recknagelschen Geometrie (München 1871) in H. Z. III. p. 282 und ebenda p. 285 die Besprechung des Brockmannschen Lehrbuches.

[8]) Schmidts Encyclopädie II. (?) p. 734.

gemeinheit der Methoden, als wegen der weitgreifenden Anwendbarkeit der gefundenen Wahrheiten empfiehlt.“

Und Prof. Günther sagte in seinem Vortrage „Die pädagogisch verwertbaren Errungenschaften der Neuzeit“ auf der 32. Versammlung der Philologen und Schulmänner zu Wiesbaden:[1]) .... „Es kann im besondern uns Gymnasiallehrern .... meiner Meinung nach zunächst nur darauf ankommen, dem projektivischen Grundgedanken gleich vom ersten Anfang an zum Durchbruch zu verhelfen;[2,3]) dies thun wir, in-
dem wir sofort den wichtigen Begriff des Parallelismus ein- 181

---

[1]) Denselben Gegenstand behandelt ein Vortrag von Prof. Hauck (Tübingen) „Über die Stellung der neueren Geometrie zur Euklidischen Geometrie und über die Aufnahme der ersteren in den Lehrplan der 10klassigen Realschulen und Realgymnasien“ gehalten in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion der 31. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Tübingen vom 25. bis 28. September 1876. — Siehe H. Z. VII. p. 510–514. Hier seien die drei Sätze wiedergegeben, in die Prof. Hauck seinen Vortrag zusammenfaſst:

1. Es ist mit Rücksicht auf den gegenwärtigen Stand sowohl der Mathematik als der technischen Wissenschaften dringendes Bedürfnis, daſs die neuere Geometrie in den Lehrplan der 10klassigen Realschulen und Realgymnasien aufgenommen werde.

2. Die Herübernahme von einzelnen Sätzen der neueren Geometrie als Anhängsel an die Euklidische Geometrie kann dieses Bedürfnis nicht befriedigen. Andrerseits müssen die in jüngster Zeit gemachten Versuche einer Verschmelzung der Geometrie der Lage und der Geometrie des Maſses teils als ihren Zweck nicht erreichend, teils als verunglückt bezeichnet werden. Dagegen ist die Reformirung der Euklidischen Geometrie im Sinne der neueren Geometrie ein dringendes Bedürfnis.

3. Die naturgemäſseste Stelle für die Einschaltung der neueren Geometrie in den Lehrplan der höheren Lehranstalten ist im Anschluſs an die deskriptive Geometrie, und zwar zwischen dem I. und II. Teil derselben nach der landläufigen Einteilung.

Die Resolutionen der Versammlung, die sich hieran anschlossen, sind weiter oben im Text angeführt.

Vergl. hierzu: Ausführlichere Mitteilungen eines Passus aus dem Vortrag über die Stellung der neueren Geometrie zur Euklidschen von Hauck. H. Z. VIII. p. 91—95.

[2]) Günther, Die pädagogisch verwertbaren Errungenschaften der Neuzeit, Vortrag etc. siehe H. Z. IX. p. 80—88. Seite 84.

[3]) Vergl. Buchbinder, Über die synthetische Behandlung der Kegelschnitte auf Gymnasien. H. Z. X. p. 70–76.

führen, die Grundgebilde der Geometrie der Lage, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel, gebührend betonen und soviel als möglich die prinzipielle Scheidung zwischen Ebene und Raum als unnatürlich fortfallen lassen.[1]) — Es werden dann die Arbeiten von Wolf, Frischauf, Hankel, H. Müller erwähnt und gewürdigt. . . . . Bei dieser Art der Auffassung . . . . werden wir fürs erste bestehen und auch mit der Euklidischen Geometrie, welche aus unzähligen Gründen doch auch Manches für sich hat, einen leidlichen modus vivendi herstellen können.“ Es folgt dann noch ein Lob der Konstruktionsaufgaben.

Bei der Betrachtung der neueren Methoden scheint mir von ganz besonderem Werte die Äufserung, dafs das Ideal der geometrischen Beweisführung die Evidenz der Notwendigkeit sei; dafs aber Beweis und Lehrsatz nicht als glücklicher Einfall eines besonderen Gelehrten oder als zufällig gefundener Kunstgriff erscheinen dürften. Nur möchte ich diese Wahrheit auf das ganze System der Elementargeometrie ausgedehnt wissen, auch die Reihenfolge der Sätze und ihr Zusammenhang darf nicht als etwas zufälliges erscheinen, die Entwicklung der Geometrie mufs durchaus nach genetischen Grundsätzen erfolgen.

In vielen Aussprüchen finden wir diesen Grundsatz aufgestellt[2]), von denen nur einige hier angeführt werden sollen: „Am wenigsten sind die nach breiter dogmatischer Methode, nach dem Muster Euklids bearbeiteten, eine genetische Anordnung gänzlich verschmähenden Lehrbücher für die Schule brauchbar“, oder: „Eine Lehrweise, welche schriftlich und mündlich lediglich die dogmatische Methode in der alten von Euklid ererbten starren Form befolgt, ist schonungslos zu verurteilen“, und ferner ein Ausspruch, der uns, die Lehrer der Mathematik, besonders nah angeht:[3])

170 Gerade diese Methode (die dogmatische) hat dem mathe-

---

[1]) Man vergl. hierzu das mehrfach zitierte Programm von Schwering. Coesfeld 1889.

[2]) Vergl. E. Müller, Offener Brief an den Herausgeber. — H. Z. III. p. 370—75.

[3]) H. Z. I. p. 246—47.

matischen Unterricht empfindlich geschadet, da sie das Dogma 171
von der Unbegreiflichkeit der Mathematik mit befestigen half.“ 73
Einen wesentlichen Fortschritt auf dem Gebiete des elemen- 196
taren geometrischen Unterrichts bedeutete die Einführung des 50
sogenannten propädeutischen Unterrichts.[1-5]) In der richtigen 178
Weise erteilt macht derselbe nicht nur den Schüler mit den 209
Gebilden der ebenen Geometrie vertraut,[6-8]) er nützt auch da- 117
durch, dafs der Schüler unter Aufsicht sich an den Gebrauch 65
von Lineal und Zirkel gewöhnt. Die durch eigene Anschauung 94
und eigene Ausführung mit Lineal und Zirkel erworbene ver- 61
traute Kenntnis geometrischer Formen mufs auf dieser Stufe
den Ersatz bilden für die mangelnde Fähigkeit folgerichtigen 89
Schliefsens. Der vorbereitende Unterricht beschränkt sich auf 174
die Übung der Anschauung; die Übungen im Schliefsen müssen 14
der wissenschaftlichen Geometrie vorbehalten bleiben; ja viel- 164
leicht kann sogar in den letzteren anfänglich von strengeren 195
Beweisen abgesehen werden, da ein geübteres Schlufsvermögen 175
bei den Schülern vorausgesetzt wird, als der betreffenden Alters- 176
klasse zugemutet werden kann. Über die zuletzt erwähnte 177
Schwierigkeit aber würde man leicht hinwegkommen, wenn
man die Arithmetik erst in Sekunda begönne. Dann könnte
der propädeutische Unterricht in der Geometrie noch durch 21

---

[1]) Man vergleiche hierzu: Reidt, Anleitung. § 40 u. § 41.

[2]) Vergl. Hoffmann, Proben aus einer „Vorschule der Geometrie“. H. Z. IV. p. 23—35.

[3]) Vergl. die geometrische Formenlehre vor einem Vereine Leipziger Lehrer. H. Z. XX. p. 468—473.

[4]) Erler, Ein propädeutischer Unterricht in der Geometrie ist notwendig, H. Z. X. p. 76—77. These: „In der Geometrie ist ein besonderer propädeutischer Unterricht nötig, welcher jedoch dem Inhalte des geometrischen Lehrgangs nicht vorgreifen darf.“

[5]) Vergl. die Rezension von: J. C. V. Hoffmann, die Vorschule der Geometrie. H. Z. V. p. 237—43.

[6]) Vergl. H. Kiefsling, das geometr. Zeichnen als Vorschule für den math. Unterricht. — H. Z. I. p. 47—59.

[7]) Vergl. O. Meyer, der geometrische Zeichenunterricht in Quinta. Schwetz, Progymnasium. Progr. Nr. 38 besprochen in H. Z. XVI. p. 520.

[8]) Vergl. Diekmann, Der (erste) geometrische Unterricht, eine Naturgeschichte des Raumes. H. Z. XX. p. 381—382.

179 die ganze Quarta hindurch fortgesetzt werden und würde so
201 erst in seiner vollen Bedeutung zu Tage treten.

205 Freilich müfste er sich dann nicht auf einfaches Figuren-
zeichnen beschränken, sondern gewissermafsen die Anfangs-
gründe der Geometrie der Lage umfassen, jedenfalls müfste er
so erteilt werden, dafs er die Bewegung der Figuren oder
vielmehr die Entstehung derselben durch Bewegung verdeut-
lichte.

79 So würde durch die blofse sinnliche Anschauung,[1]) ohne
207 dafs irgend ein Anspruch an abstrakte Vorstellung gemacht
163 zu werden brauchte, der Schüler mit den Gebilden der Plani-
metrie vertraut werden. Der Grundsatz vom besondern zum
allgemeinen ist nirgends mehr als gerade hier anzuwenden.
Nicht minder soll der Schüler schon in der Propädeutik einen
Vorgeschmack der genetischen Methode bekommen, nach
welcher die räumlichen Gesetze naturgemäfs (ungekünstelt)
aus- und aufeinander folgen und sich entwickeln. Es sind hier
ebenso wie in der wissenschaftlichen Geometrie die Aufgaben
nach dem genetischen Prinzip zu ordnen.[2]) Erst im eigent-
lichen wissenschaftlichen Unterricht, der also mit Tertia erst
beginnen würde, müfste man davon absehen, nur zur sinnlichen
Anschauung und zur bildlichen Darstellung konkreter Gröfsen
durch Zeichnung anzuhalten, sondern die Schüler auch schon
zur reinen Vorstellung der abstrakten Gröfsen und Gebilde
hinleiten, was durch die Vorübungen und bei dem gereiften
Verstande der Schüler ohne grofse Schwierigkeiten geschehen
könnte. Das, woran wir jetzt leiden, ist im grofsen und ganzen
eine mangelhafte Ausbildung der Grundvorstellungen, denn
infolge davon tritt allzu leicht im Verlauf des mathematischen
78 Unterrichts ein gelegentliches Versagen ein, ein Übel, das auf
38 dem natürlichsten Wege geheilt wird, wenn wir auf die ersten

---

[1]) Vergl. hierzu: Reidt Anleitung, § 18.

[2]) Vergleiche: Falke, Über eine neue Behandlung der Ähnlichkeits- und Kongruenzsätze. — Arnstadt 1875. — Progr.

Ferner: Hoffmann, Vom Allgemeinen zum Besonderen oder vom Besonderen zum Allgemeinen? — H. Z. III. p. 366—367.

J. C. Becker, Ein Brief an den Herausgeber. IV. p. 129—131 nebst Entgegnung. p. 131—133.

Anfänge recht viele Sorgfalt verwenden, zuerst der Anschauung 185
und der Erziehung der Vorstellungskraft recht breiten Raum 12
gewähren, dagegen die abstrakte, rein logische Betrachtungs- 11
weise möglichst lange bei Seite halten. Wird diese dann im
Unterrichte eingeführt,[1]) dann tritt jene oben erwähnte Wechsel- 19
wirkung ein; die durch Anschauung gewonnene Geometrie
regelt nun die Anschauung.

Bei dieser Betonung des propädeutischen Unterrichtes mufs
aber vorausgesetzt werden,[2]) dafs derselbe in den Händen eines 29
ausgebildeten Mathematikers liegt oder dafs wenigstens der
erste Mathematikus der Anstalt eine sorgfältige Oberaufsicht 28
darüber hat;[3]) denn wie auf der einen Seite der Nutzen ein
erheblicher sein würde, könnte ein falsch geleiteter propädeu- 90
tischer Unterricht einen nicht oder nur schwer wieder gut zu 107
machenden Schaden anrichten.

Wenden wir uns nun zu dem wissenschaftlichen geome- 202
trischen Unterricht,[4]) so stöfst uns gleich zuerst wieder ein 187
Übelstand auf, der ein Erbteil Euklidscher Methode, leider 197
noch in fast allen Lehrbüchern, mit wenigen rühmlichen Aus- 172
nahmen zu finden ist, ich meine die Sucht zu definieren.[5])
Wie oft ist auch hierüber schon geklagt worden und doch 123
haben wir uns davon noch nicht befreien können. Noch 173
immer wird der Schüler mit Definitionen völlig unbekannter
Raumanschauungen überschüttet und die Speise dann durch 66
dogmatischen Vortrag Euklidscher Beweise vollständig un- 53
geniefsbar gemacht:[6–8]) oder im Gegenteil eine völlig bekannte 64

---

[1]) Vergl. Der Gymnasialunterricht von J. H. Deinhardt. — Hamburg, Perthes. — [p. 182 ff.]

[2]) Vergl. H. Z. II. p. 108.

[3]) Vergl. H. Z. XVIII. p. 620.

[4]) Vergl. hierzu: Reidt Anleitung § 42.

[5]) Vergl. H. Schotten, Zur Definition des Winkels. H. Z. XX. p. 481—501.

[6]) Vergl. J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. H. Z. I. p. 228.

[7]) Vergl. Ciala, Zu dem Aufsatze von J. Kober: Geometrische Grundbegriffe. H. Z. II. p. 42—44. — Ferner: H. Z. II. p. 211.

[8]) Hoffmann, Studien über geometrische Grundbegriffe. — H. Z. III. p. 443—452. — p. 523—534. — IV. p. 102—119.

11 Raumanschauung wird durch eine möglichst verzwickte Defini-
48 tion möglichst verdunkelt.[1])

18 Man lasse doch einfach die Definitionen weg und knüpfe
41 anfänglich an die sinnliche Anschauung und den damit un-
47 bewufst verknüpften Begriff an, man wird unendlich viel
54 weiter kommen.

15 Um nur ein Beispiel zu erwähnen;[2]) wie müht man sich
62 ab, dem Schüler eine Definition der Geraden einzuprägen, anstatt einfach diesen Begriff als einen a priori vorhandenen zu betrachten und davon auszugehen. Nebenbei gesagt haben diese Definitionen gewöhnlich auch an und für sich geringen Wert und es scheint mir sehr wahr zu sein, wenn Tyndall sagt: „Es erhielt niemals jemand einen Begriff von einer geraden Linie nach der Definition, die Euklid von ihr gab.“

Ähnlich äufsert sich van Swinden:[3]) „Es verhält sich mit dieser Erklärung, wie mit allen Erklärungen von Dingen, die zu einfach sind, als dafs sie noch einer Erklärung durch Worte fähig wären, — sie sind alle ungenügend und mehr oder weniger dunkel.“

Auch Ulrich in seinem Lehrbuche der reinen Mathematik (1836) sagt:[4]) „Die gerade Linie ist eine so einfache räumliche Gröfse und ursprüngliche Vorstellung des Verstandes, dafs es schwer hält, deren Begriff auf andere einfachere oder mehr bekannte Begriffe zurückzuführen.

Kunze in seinem Lehrbuche der Planimetrie erklärt:[5]) Eine Linie heifst gerade, wenn sie in allen ihren Punkten einerlei Richtung hat — und fügt in einer Anmerkung, in der er die Definition Euklids anführt, naiver Weise hinzu: Man hat noch verschiedene andere Erklärungen der geraden

[1]) Hoffmann, Die Prinzipien des ersten Buches von Euklids Elementen. H. Z. III. p. 114—143.

[2]) Es sei auch an dieser Stelle noch einmal besonders auf § 42 in Reidts Anleitung hingewiesen.

[3]) J. H. van Swindens, Elemente der Geometrie herausgegeben von C. F. A. Jacobi. — Jena, Frommann.

[4]) Lehrbuch der reinen Mathematik von G. C. J. Ulrich. — Göttingen, Vandenhöck u. Ruprecht.

[5]) Lehrbuch der Geometrie von Dr. C. L. A. Kunze. — Jena, Frommann.

Linie, alle aber setzen im Grunde voraus, dafs man bereits wisse, was eine gerade Linie sei.

Auch Ed. Müller tadelt die unhaltbaren Definitionen, während Rausenberger a. a. O. auf alle derartigen Definitionen verzichtet und die Fundamentalgebilde einfach als durch die Anschauung gegeben annimmt, so Punkt, wie Gerade resp. Linie überhaupt, Ebene, Fläche und Körper und noch öfter im Verlaufe der Arbeit auch ganze Lehrsätze[1]), die man früher zu beweisen beflissen war.

Auf der andern Seite darf man aber hierin auch wieder 194
nicht zu weit gehen, denn wenn auch zugegeben werden
mufs, dafs diese Begriffe in der menschlichen Anschauung be-
gründet sind,[2]) so müssen dieselben doch zum Bewufstsein ge-
bracht werden.[3])

Ähnlich verhält es sich mit den Grundsätzen. Hier sollte 192
man nicht zu sparsam sein. Allerdings verstehen sich alle 193
diese Sätze von selbst, sonst wären es keine Grundsätze, aber 68
dennoch fordert es die wissenschaftliche Strenge, damit man
sich dessen bewufst werde und bleibe, dafs sie auch ausdrück-
lich ausgesprochen werden. Solcher Grundsätze müssen eine
viel gröfsere Anzahl aufgestellt werden, als Euklid giebt.
Bei E. Müller finden wir z. B. 24, darunter auch zugleich 52
stereometrische.[4]) 191

Ebenso wie die Sucht nach Definitionen verwerflich ist, 156
ist es diejenige nach Beweisen. So wird z. B., abgesehen von 48

---

[1]) „In der Rezension einer Abhandlung von Drobisch über den Begriff des Stetigen schreibt Schnuse: 'Was ferner die fast sprichwörtlich gewordene Evidenz an Strenge der mathematischen Begriffe betrifft, so mufs Referent offen bekennen, dafs sie leider sehr oft nicht vorhanden ist, selbst bei den besten Autoren, und es kann wohl kaum in einer anderen Wissenschaft mehr willkürliche Begriffsbestimmungen, illusorische Beweise und überhaupt Verkehrtheiten geben wie in der Mathematik.'"

Vergl. H. Z. VI. p. 266–67.

[2]) H. Z. I. p. 323. Ausführliche Besprechung des E. Müllerschen Werkes „Elemente der Geometrie, streng systematisch dargestellt" durch Buchbinder — Schulpforta.

[3]) Vergl. H. Z. III. p. 347—365.

[4]) Elemente der Geometrie, streng systematisch dargestellt von Dr. E. Müller. I. Grundvorstellungen der Geometrie. — Braunschweig, Vieweg.

182 Euklid und vielen anderen, auch von Legendre und Kunze
208 der Lehrsatz aufgestellt: „Alle rechten Winkel sind einander gleich“ und bewiesen. Kober sagt hierzu:[1]) „Man möchte sich wundern, daſs noch kein Mathematiker bewiesen hat,[2]) daſs alle Viertelstunden einander gleich sind“.[3]) In solchen Bemühungen gipfelt in der That die Beweismanie vieler Mathe-
26 matiker. Ein schlagendes Beispiel, das noch hierher gehört,
165 ist, daſs in einem Lehrbuche der Planimetrie der Lehrsatz
166 aufgestellt wird:[4]) „Jeder Kreis hat nur einen Mittelpunkt.“ Dieser geistreiche Lehrsatz wird dann ausführlich bewiesen.

Durch diese Bemerkungen soll die Wissenschaftlichkeit des Unterrichts durchaus nicht getroffen werden, im Gegen-
110 teil wenige, aber gute Definitionen, nur notwendige Beweise werden wissenschaftlicher sein und mehr Nutzen bringen, als bisher dieser Zweig der Mathematik gebracht. Es erhöht sich aber noch die Bedeutung des Verfahrens, wenn wir bedenken, daſs auf diese Weise der planimetrische Elementarunterricht ein viel extensiverer werden kann, so daſs die Lücke wegfällt, die zwischen den höheren Lehranstalten und der Universität weit klafft. „Den gründlichen, streng wissenschaftlichen Unterricht in den Elementen der Mathematik erklärt die Schule, namentlich in den unteren Klassen, für zu schwer:
111 die Universität aber betrachtet die Elemente als zu leicht und
153 setzt sie ohne weiteres als hinlänglich bekannt voraus und baut auf dem Fundamente fort, unbekümmert, ob dasselbe fest und sicher ist.[5])

---

[1]) J. Kober, Besprechung des Lehrbuches von A. Ziegler. H. Z. I. p. 239—242.

[2]) Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie.

[3]) H. Z. III. p. 136.

[4]) Vergl. Hoffmann, Zur Didaktik. 1) Auch eine Mahnung an die Mathematiker. H. Z. IX. p. 275. — Ferner Hoffmann, Zu den unnötigen Beweisen. — H. Z. X. p. 414—15. — Ferner Reidt, Kleine Bemerkungen zum Unterricht in der Planimetrie. H. Z. XIV. p. 18—21 und Entgegnung Hoffmanns, Die Fanatiker des Beweisens. H. Z. XIV. p. 22—25.

[5]) Hankel (Antrittsrede) nimmt wohl auch diesen Standpunkt ein, wenn er sagt: „Hat der Schüler den Unterbau in seinen groſsen Grund-

Ein anderer schon oben erwähnter Übelstand ist die oft nur äufserliche Aneinanderreihung der Lehrsätze, so dafs sie in ihrer Aufeinanderfolge einen ähnlichen Eindruck machen werden, wie der dogmatische Beweis des einzelnen Satzes, als das allerdings anzustaunende Werk eines Gelehrten, der Glück beim Erfinden gehabt hat. Um auch hier nur ein bemerkenswertes Beispiel zu geben, so werden die Kongruenzsätze nicht einem einheitlichen Prinzipe untergeordnet, ja sie folgen nicht einmal unmittelbar aufeinander,[1]) sondern sind meist durch die Sätze über das gleichschenklige Dreieck unterbrochen.[2])

Ein anderes Beispiel ist der berühmte, beinahe hätte ich gesagt berüchtigte Pythagoräische Lehrsatz oder vielmehr der Beweis desselben mittelst Flächenvergleichung, der den Schrecken der Schüler bildet und noch oft später als etwas Schreckliches erwähnt wird, wenn nur noch der Name Pythagoras, aber längst nicht mehr sein Satz, geschweige dessen Beweis bekannt ist. Rausenberger a. a. O. verweist ihn an die einzige ihm gebührende Stelle — in die Proportionslehre, wo er sich auf das leichteste und natürlichste ergiebt, dadurch, dafs dies die einzige Stelle ist, wo er ihn behandelt.

Auch die Lehre von den Proportionen am Kreise bedarf

---

zügen verstanden, dann hinauf in die Höhe! Von oben erst kann man den Bau der Fundamente und ihren Zweck recht erkennen. Wer zu lange da unten bleibt, verliert die Lust und die Kraft, den Gang in die Höhe zu wagen. Where is a will there is a way.“

„Man liebt es, uns Mathematikern vorzuwerfen, dafs wir nicht genug Rücksicht nehmen auf die Kräfte der Anfänger.“ . . . . „Man mache höhere Ansprüche und sie werden erfüllt werden.“

Dagegen machte Günther (Wiesbaden 1877) auf die sich immer mehr vergröfsernde Kluft zwischen den höheren Lehranstalten und der Universität aufmerksam, schlug vor, dieser drohenden Gefahr durch eine Erweiterung des Pensums zu begegnen und „das unheilvolle Ereignis einer völligen Lösung des nothwendigen inneren Zusammenhangs in dem Unterrichtswesen“ dadurch hintanzuhalten.

Man vergl. ferner: Müller, Mahnung an die Mathematiker. H. Z. VI. p. 268 ff. — Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schul-Geometrie; H. Z. VII. p. 179—184.

[1]) Vergl. Reidt, Kleine Bemerkungen zum Unterricht in der Planimetrie. H. Z. XII. p. 8—17.

[2]) Vergl. Rausenberger p. 34, 3 u. 4.

durchaus einer Umgestaltung im Sinne der neueren Geometrie, hier ist meines Erachtens eine Gelegenheit, die Anschauungen und Methoden der neueren Geometrie ungezwungen in den Rahmen des Schulunterrichts hineinzubringen, so dafs Aussprüche wie der folgende nicht nur fromme Wünsche enthalten:[1] „Eine auf neuen Grundlagen beruhende Darstellung der Geometrie wird den Unterricht voraussichtlich in dem Grade erleichtern, dafs er auch die einfacheren Lehren der neueren Geometrie in gebührender Weise wird berücksichtigen können, ohne mehr Zeit in Anspruch zu nehmen als bisher.“

Die Betrachtungen der vorliegenden Abhandlungen sollen sich auf das Gebiet der Planimetrie beschränken; sie spielt als das Anfangsglied ja auch die wichtigste Rolle, einer Umgestaltung des Unterrichts in der Planimetrie müfste notwendig diejenige der Stereometrie folgen. In Bezug auf die letztere machen sich ja auch schon bedeutende Stimmen bemerkbar, die eine Änderung der gewöhnlichen Methode anstreben, die Frage wird aber wohl über kurz oder lang ihrer Entscheidung entgegen gehen.

Meinen Ausführungen über den planimetrischen Unterricht möchte ich noch eins hinzufügen.[2]) Nach meiner Ansicht müsste der Zeichenunterricht mit dem geometrischen von
100 Anfang an systematisch verknüpft werden, ja ein rein geo-
23 metrisches Zeichnen müfste der einzige Gegenstand dieses
143 Unterrichtszweiges auf der Schule sein. Durch einen so ge-
25 leiteten Unterricht würde der Schüler mit der Handhabung
51 von Lineal und Zirkel vertraut werden, ja bei der reichlichen Zeit würden die Schüler es zu einer gewissen Vollendung bringen können, die äufserst befruchtend auf den wissenschaft-
95 lichen Unterricht in der Geometrie einwirken würde. Das obligatorische Zeichnen müfste aber auch noch in Sekunda und Prima eingeführt werden und sich als Ziel das perspek-

---

[1]) Vergl. Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schul-Geometrie. H. Z. VII. p. 183.

[2]) Vergl. Kiessling, Das geometrische Zeichnen als Vorschule für den mathematischen Unterricht. — H. Z. II. p. 47.

tivische resp. projektivische Zeichnen stecken.[1]) Würde das erreicht, so würde ein grofser Teil der Vorwürfe gegen das Gymnasium schwinden. 98

Es sei mir gestattet meine Ansichten hierüber durch eine Vergleichung klar zu stellen. Das Ziel gleichmäfsiger Ausbildung für alle und einer harmonischen Ausbildung des einzelnen mufs für das Zeichnen ebenso gelten, wie für alle anderen Fächer. Das Gymnasium soll nicht für einen bestimmten Beruf vorbereiten, sondern für alle. Wie nun der Mathematiker nicht Mathematiker heranzieht, der Gesanglehrer keine Solosänger, der Turnlehrer keine Turner heranbildet, sondern der erste durch die Mathematik auf den Geist einwirkt, der letzte auf einen kräftigen, gewandten Körper hinarbeitet, so soll und darf auch im Zeichenunterricht nicht auf künstlerische Ausbildung der Wert gelegt werden. Das Ziel braucht nicht zu sein, eine Landschaft oder einen Kopf künstlerisch zeichnen zu können, — derartige Leistungen müssen für den, der sich dazu berufen fühlt, ebensogut in Privatstunden gefördert werden, wie etwa die Ausbildung der stimmlichen oder sonstiger musikalischen Anlagen — sondern das Zeichnen mufs einzig und allein in systematischer Verbindung mit der Mathematik stehen, deren dienende Schwester sein. Für meine Ansicht spricht meiner Meinung nach auch das jetzt im Turnunterricht zur Geltung gekommene Prinzip: früher vorzugsweise Gerätturnen, Einübung besonderer Kunststücke, Ausbildung besonders kräftiger Schüler, jetzt Reigen und Turnspiele der Gesamtheit, an denen auch der weniger Kräftige sich beteiligen kann, um so auch des Nutzens teilhaftig zu werden.

Zum Schlusse möchte ich noch einmal meine Ansichten kurz zusammenfassen und der besseren Beurteilung wegen in Thesen aussprechen:

1) *Der geometrische Unterricht mufs vor dem arithmetischen entschieden bevorzugt werden, weil er die Grundlage bildet, weil er in den unteren Klassen verständlicher ist.*

[1]) Vergl. Holzmüller, Einführung in das stereometrische Zeichnen. Leipzig, Teubner. — Besprochen in H. Z. XVIII. p. 515—520.

2) Der arithmetische Unterricht beginnt erst in Sekunda. Einzelne Teile erfordern nur mechanische Einübung.

3) Die Methode des geometrischen Unterrichts ist im Sinne der neueren Geometrie umzuformen, ohne jedoch die Zwecke der Schule zu verläugnen.

4) Der Zeichenunterricht mufs für alle Klassen obligatorisch gemacht werden, ist jedoch im systematischen Zusammenhange mit der Geometrie zu erteilen, also ein rein geometrisches Zeichnen.

Zitate.

1 Je einmütiger alle Mathematiker und fast alle anderen, die sich mit diesem Gegenstande beschäftigt haben, hierin sind, um so gröfsere Verwunderung mufs es hervorrufen, wenn wir in der neuesten Pädagogik, dem vielgerühmten und vielgelesenen Handbuch des Hrn. Prof. Schiller die entgegengesetzte Ansicht vertreten finden. Seite 552 a. a. O. heifst es: „Es ist eine viel erörterte Frage, ob die Mathematik für alle Schüler bis zu einem gewissen Umfange erfafsbar sei, und theoretisch wird man sehr leicht damit fertig,[1]) indem man sagt, dieselbe sei eine reine Verstandeswissenschaft, und wer überhaupt denken könne, müsse auch Mathematik im schulmäfsigen Umfange lernen können. Dieser Theorie entsprechen indessen die Thatsachen nicht........, so wird doch bezüglich des inneren Sehens........ sich immer ein recht bedeutender Unterschied unter den Schülern bemerkbar machen.“

Das letztere wird gewifs Niemand leugnen wollen; das ist aber keine besondere Eigentümlichkeit der Mathematik. Wenn wir nicht auf allen Gebieten des Unterrichts mit den „sehr bedeutenden Unterschieden der Schüler“ zu kämpfen hätten, so würde wohl die pädagogische Kunst auf

---

[1]) Der versteckt hierin liegende Vorwurf der oberflächlichen Behandlung der Frage dürfte nach den folgenden Ausführungen für Prof. Schiller ein zurückfliegender Pfeil sein.

einer ungleich höheren Stufe stehen, als jetzt, ja sie würde längst ihrer Vollendung unendlich nahe haben gebracht werden können. Diese Worte Schillers können also nicht im Ernst als ein Beweis für die besondere Veranlagung, die die Mathematik erfordert, angesehen werden. Aber prüfen wir die Schillersche Ansicht etwas näher. Bei den Worten „viel erörterte Frage“ zitiert Schiller drei Aufsätze aus J. J. f. P. — darunter einen betitelt „adversus mathematicos“ — je einen Aufsatz aus Dittes' Pädagog. und aus Z. R. W., ferner Wittstein Methode d. math. Unterrichts. Ich bin weit entfernt zu glauben, dafs Schiller alle seine Quellen angegeben, aber niemand wird es einem Mathematiker verdenken können, wenn er bei einer so wichtigen Frage wie die vorliegende das Verlangen stellt, Reidts Anleitung zum math. Unterricht und Hoffmanns Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht als Hauptquellen angegeben zu finden:[1]) und dafs er, wenn diese fehlen, mit einigem Mifstrauen auf die Zuverlässigkeit der vorgetragenen Ansicht an diese herangeht. Wenn der philologische Verfasser einer Pädagogik es nicht für nötig findet, sich mit derjenigen der Mathematik eingehend zu beschäftigen,[2]) so mag er doch dieses Kapitel auslassen und auf spezielle Werke wie Reidts Anleitung — ja selbst Wittsteins Methode hinweisen.[3, 4]) Das würde sicher-

---

[1]) Dann würde allerdings bei der Beantwortung der Frage genau das entgegengesetzte Resultat sich ergeben haben, als zu dem Schiller gekommen ist.

[2]) Dafs Schiller die Mathematik hoch schätzt als Bildungsmittel, geht aus einer weiter unten angeführten Stelle hervor.

[3]) Es ist gemeint: Wittstein, die Methode des mathematischen Unterrichts. — Man vergl. die Rezension dieser Schrift in H. Z. XI. p. 291.

[4]) Roth widmet z. B. in seiner Gymnasialpädagogik der Mathematik gar keinen Abschnitt. Aus welchen Gründen, das leuchtet überall da ein, wo er der Mathematik Erwähnung thut. Er will dieselbe überhaupt aus der höheren Schule verbannt wissen, wenigstens als ein obligatorisches Fach; dabei zeigt er dieselben Ansichten über besondere Veranlagung für Mathematik wie Schiller. Er sagt auch p. 114 (ich zitiere nach der 2. Auflage 1874): „die allgemeine Verpflichtung zu diesem Lernen (Mathematik) wird durch die Erfahrung als ein Fehlgriff derjenigen erwiesen, welche unsere Schulordnung gemacht haben!“ er-

lich empfehlenswerter sein, als eine Behandlung, die sich schon aus folgender Äufserlichkeit ergiebt: 1) Religionsunterricht: 17 Seiten; 2) Deutsch: **91** Seiten; 3) Alte Sprachen (inkl. Hebräisch): **114** Seiten; 4) Neuere Sprachen: **29** Seiten; 5) Geschichte: 43 Seiten; 6) Geographie: 17 Seiten; 7) Mathe-

---

wähnt dann einen Ausspruch von Dr. Eilers: „Dazu kommt, dafs Talente für Sprachen, Geschichte, Geographie viel allgemeiner sind, als Talente für Mathematik." Auch der Konflikt zwischen Philologie und Mathematik wird als Grund erwähnt für Abschaffung der letzteren. — Bei Bielmeyer in seinem an anderer Stelle zitierten Programm findet sich bei Besprechung dieser Verhältnisse auch noch folgendes Zitat: „Dafs es bestimmt geartete Naturen giebt, welche bei sonst hohen Talenten eine dezidierte Unfähigkeit für die Mathematik besitzen, so dafs sie auch bei pflichtmäfsig treuer Anstrengung nicht vorwärts kommen." (Aus „Das bairische Gymnasialwesen sonst und jetzt. Erlangen 1869.")

Man vergleiche hiermit folgende Worte aus einer Besprechung der Rothschen Pädagogik von Dr. Elsperger: „Wenn Roth auch der Mathematik einen Platz unter den fakultativen Lehrgegenständen anweist, so möchten ihm nur wenige beipflichten. Allerdings scheinen die Sprachen eine andere Art der Begabung zu fordern als die Mathematik und es kann vorkommen, dafs Schüler in beiden sehr ungleiche Fortschritte machen. Aber nach den Erfahrungen des Referenten liegt der Grund, weshalb einzelne sonst begabte Schüler in der Mathematik wenig leisten, fast nur in der Übereilung des ersten Unterrichtes und in einer dadurch bei ihnen hervorgerufenen Verzagtheit und in der vorgefafsten Meinung, für diese Wissenschaft kein Talent zu haben."

Hoffmann sagt in H. Z. I. p. 3 — nachdem er dargelegt, dafs die Mathematik sich ihre Stelle erst habe erkämpfen müssen, weil sie von der Mehrzahl der Gymnasialpädagogen nicht als vollberechtigt im Gymnasialunterricht angesehen worden sei —: „Wie hätten auch sonst die exakten Unterrichtsfächer Beurteilungen erfahren können, wie die eines Niemeier, Nägelsbach, Roth, Bäumlein, Gockel, Mühlmann* und der drei anonymen Verfasser von: „Wert und Unwert der Mathematik" (Kassel 1836), „adversus mathematicos" (Mas. päd. Jahrb. Bd. 94. S. 205) und „Das bairische Gymnasialwesen sonst und jetzt" (Erlangen 1869)!"

*Niemeier, Grundsätze d. Erz. II. S. 173—174. — Nägelsbach, Gym. Päd. S. 156—60. — Bäumlein, die Bedeutung der klass. Studien etc. Heilbronn 1849. S. 49. — Gockel, die Gelehrtenschule gegenüber den Zeitforderungen. Karlsruhe 1862. S. 23—25. — Roth, Gymnasialpädagogik. Stuttgart 1865. S. 18, 97, 99 u. 288 ff. — Mühlmann, Beiträge zur Gymnasialfrage. Leipzig 1868. S. 36—38.

matik in Gymnasien und in Realanstalten: 18 Seiten.[1]) Paulsen widmete der Mathematik in seinem pädagogischen Kolleg eine ganze Stunde.

Progr. d. Rprg. z. Strausberg. 1884. — Schulze: Bemerkungen etc.

Verhandlungen der elsafs-lothringischen Direktoren-Kon- 2
ferenz. 1871. Strafsburg.

„Dafs keine andere Art der Schulkenntnisse mit dem Austritt aus der Schule so schnell spurlos verloren geht oder gar so gleichgiltig weggeworfen wird, wie die mathematischen, hat unstreitig zum grofsen Teil darin seinen Grund, dafs der Schüler sie nicht auf Probleme des wirklichen Lebens anwenden gelernt hat.“[2])

Progr. d. R. I. Ord. z. Magdeburg. 1882. — Dr. Jenrich: Beiträge zur Methodik etc.

Man vergleiche zu der vorliegenden Frage das Vorwort in H. Z. I. vollständig.

Cfr. Buchbinder, der math.-naturwiss. Unterricht auf deutschen Gymnasien. H. Z. I. p. 10, ferner: H. Z. II. p. 153—154. — Vergl. ferner: H. Z. X. p. 315, ferner: Eine Wertschätzung des Schulmathematikers an einer höheren Schule seitens eines Schulphilologen. H. Z. XVI. p. 467—473.

Ferner: Eine Stimme gegen den Weissenfelsschen Angriff auf die Mathematik und die Mathematiker. H. Z. XVII. p. 73—76.

Ferner: Hoffmann, Einige wichtige pädagogische Tagesfragen mit besonderer Berücksichtigung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. H. Z. XVIII. p. 237—249.

[1]) Also Sprachen zusammen 234 Seiten, Mathematik auf Gymnasien und Realanstalten 18 Seiten. Sapienti sat!

[2]) Diese Anwendung der Probleme der Mathematik auf das praktische Leben ist aber sicherlich in der Geometrie eher möglich als in der Arithmetik, wenn die Geometrie in der richtigen Weise gelehrt wird, d. h. so, dafs in dem Schüler wirklich Anschauung geweckt wird, dafs der Unterricht ihn fähig macht, das Angeschaute richtig zu beurteilen, sich in die Wirklichkeit der ihn umgebenden räumlichen Verhältnisse zu finden. Die Beispiele oder Anwendungen, die geeignet sind zur Verknüpfung der wissenschaftlichen Lehre mit der Praxis zu dienen, ergeben sich hier weit ungezwungener, als es in der Arithmetik möglich ist, wo diese Verknüpfung mehr oder weniger eine äufserliche bleibt, da Inhalt und Form sich fremd sind.

3 Neue Jahrbücher für Phil. u. Päd. B. 123; 3. Heft; p. 116. Zitat.

Die Mathematik ist deswegen allgemein in den Ruf einer schwierigen Wissenschaft gekommen, man meint, sie fordere ganz besondere Anlagen, eine individuelle Organisation des Geistes, eigentümliche Stimmung des Nervensystems. Sollte nicht der Grund davon darin zu suchen sein, dafs den Schülern in den unteren Klassen zu viel zugemutet wird? .... Der Schüler soll die abstrakten Sätze der Mathematik nicht äufserlich aufnehmen und nachsprechen, sondern sie sollen lebendiges Eigentum geworden sein.[1] Kommt aber der Schüler nicht zu einer klaren Einsicht, so kann er dem Gegenstande kein Interesse abgewinnen, die Rechnungen und Konstruktionen ekeln ihn an, die Lust zur Mathematik ist ihm benommen und das Vorurteil gegen dieselbe hat sich seiner bemeistert.

4 So kommt es, dafs bei dieser synthetischen Methode Sätze aufeinanderfolgen, die einen ganz verschiedenartigen Inhalt und Charakter und keine Verwandtschaft mit einander haben,[2] denn ihre Reihenfolge wird durch den Beweis und

---

[1]) Auch diese Bemerkungen sprechen dafür, dafs man der anschaulichen Geometrie zeitlich, aber auch räumlich den Vorzug gebe. Der durch die anschaulichen Vorstellungen der Geometrie Vorgebildete wird die abstrakten Vorstellungen der Geometrie erfassen können und dann auch fähig sein die Abstraktionen der Arithmetik aufzufassen, aber — und dies sei noch einmal betont — erst nachher, daher also ein Nacheinander der beiden Disziplinen dem Nebeneinander im Anfangsunterrichte entschieden vorzuziehen ist. Wird der geometrische Unterricht anfänglich derartig betont, dann werden dem Schüler die gewonnenen und richtig verarbeiteten Vorstellungen ein lebendiges Eigentum geworden sein, auf dem er, als auf einem festen Grunde, mit Lust weiter bauen kann und wird.

[2]) Ich kann es mir nicht versagen einige besonders prägnante Beispiele aus einem der bekanntesten Lehrbücher der Planimetrie — Kambly — hier anzuführen: die Behandlung des gleichschenkligen Dreiecks mitten zwischen den Kongruenzsätzen; die Sätze vom rechtwinkligen Dreieck in § 66 u. 67, die daher, da sie gar nicht dahin gehören, auch in naturwidriger Reihenfolge gegeben werden; die Sätze in § 68 und 69, die wie die vorigen ganz aufser allem Zusammenhange stehen; § 114; § 116; — hierbei möge es bewenden.

die geometrische Hülfskonstruktion bestimmt. Dies ist die Achillesferse der Methode.[1])

In dem Naturell der Engländer mag es auch begründet 5
sein, daſs sie am zähesten an der konsequent durchgeführten Euklidischen Methode bis in die neuere Zeit festgehalten haben. Die Ausdauer im Schwierigen und die oft auf eine harte Probe gestellte Geduld im Denken scheint sie besonders anzuheimeln, da eine gewisse „Zähigkeit“ eine ihrer Charaktereigentümlichkeiten unstreitig ist.

Nichtsdestoweniger war Euklid fest davon überzeugt, 6
daſs es nur einen zur Geometrie führenden Weg gäbe, den er selbst „Königen“ nicht zu ebnen vermöchte.[2]) Nach seiner Methode ist eben jede Abweichung von der Ordnung, in welcher die Sätze aufeinanderfolgen, ungerechtfertigt, vielmehr der Weg, auf welchem man vorzuschreiten hat, aufs strengste vorgeschrieben, und dieses Zwanges wegen pflegt man von „Euklidscher Strenge“ und „Starrheit seiner Methode“ zu reden.

Verfasser fährt dann fort: Es scheint uns aber keinem Zweifel zu unterliegen, daſs Euklid vermöge seines eminenten Scharfsinns im groſsen und ganzen das Richtige getroffen hat; nur muſs seine Methode in dem Sinne verbessert werden, daſs neuere Anschauungen zu Hülfe genommen und die Sätze in anderer Weise gruppiert werden, auch dem vorwärts Schreitenden eine öftere Rast gewährt werde, ... — Ein Vorzug der Methode besteht in der Kürze, mit welcher die mathematischen Erkenntnisse erschlossen werden, und in einer ge-

---

[1]) Vergl. 154.

[2]) Hankel, die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten p. 24:

„Euklid hatte einst seinem Könige Ptolemäus, der, wie wir begreifen, das mühsame Studium der „Elemente“ abschreckend fand, mit dem ganzen Stolze eines Gelehrten erwidert: ‘Es giebt keinen Königsweg zur Mathematik.’ Wir aber können hinzufügen: die neuere Geometrie ist dieser Königsweg, sie hat ‘den Organismus aufgedeckt, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind’, und hat, wie wir ohne Übertreibung sagen können, das Ideal einer Wissenschaft beinahe erreicht.“ Vergl. auch Hankel, die Elemente der projekt. Geometrie. p. 33.

wissen Leichtigkeit des Vorwärtsschreitens..... Ein Mangel der Methode besteht darin, dafs sie den Zusammenhang zwischen den einzelnen Sätzen zu wenig andeutet, wenigstens kein hervorragendes Gewicht darauf legt; sie zwingt zwar durch passende Hülfskonstruktionen und ausreichende Gründe zur Anerkennung der Sätze, bringt aber nicht zum deutlichen Bewufstsein, warum man so und nicht anders zur Wahrheit des Satzes gelangt; sie stellt durch Aneinanderreihung von Sätzen die Wissenschaft selbst als ein abgeschlossenes Ganzes dar, während sie unerschöpflich und einer unbegrenzten Ausdehnung fähig ist. Daher die heftigen Angriffe auf diese Methode!

7 Unter anderem sagt Schopenhauer:[1]) Man hat (bei dieser Art des Beweises) die unangenehme Empfindung wie nach einem Taschenspielerstreich, und in der That sind einem solchen die meisten Euklidischen Beweise täuschend ähnlich. Fast immer kommt die Wahrheit durch die Hinterthür herein, indem sie sich per accidens aus irgend einem Nebenumstande ergiebt. Oft schliefst ein apagogischer Beweis alle Thüren eine nach der andern zu und läfst nur die eine offen, in die man nun blofs deswegen hineinmufs. Dagegen sagt Schopenhauer auch: Indessen verdient die Art und Weise, wie Euklid dies durchgesetzt hat, alle Bewunderung, die ihm so viele Jahrhunderte hindurch geworden ist. — Oft würden, wie im Pythagoräischen Lehrsatze, Linien gezogen, ohne dafs man wisse, warum. Hinterher zeige es sich, dafs es Schlingen seien, die sich unerwartet zuziehen und den assensus der Lernenden gefangen nehmen. Diese eigentlich empirische und unwissenschaftliche Erkenntnis gleiche der des Arztes,[2]) welcher Krankheiten und Mittel dagegen, aber nicht den Zusammenhang beider kenne.

8 Die genetische Methode .... stellt uns auf einen höheren Standpunkt und macht neue Gesichtspunkte geltend, um die mathematischen Sätze mit einander zu verknüpfen und die Selbstthätigkeit des Schülers anzuregen. Ihr Wesen besteht

---

[1]) Die Welt als Wille und Vorstellung I. S. 84 u. 86.

[2]) Vergl. das folgende Zitat.

in Kürze darin, dafs die mathematische Wahrheit aufs innigste mit ihrem Beweise verbunden wird, so dafs der Schüler gleichsam ihre γένεσις, ihre Entstehung, ihren Ursprung Schritt für Schritt mit geistigem Auge beobachtet. Mit der Genesis des Satzes soll der Schüler zugleich den inneren Zusammenhang desselben und seine Stellung zu den übrigen anschaulich erkennen.

Verfasser fügt dann eine Kritik der Wittsteinschen Ansicht, der die genetische Methode als die einzige wahre Unterrichtsmethode preist, hinzu.

Der Geist der Mathematik ist der Geist der Ordnung und 9
Gründlichkeit; Mathematik ist Zucht des Geistes überhaupt! .... Darum erfüllt uns das εὕρηκα eines Satzes mit reiner Freude und inniger Genugthuung.

Wie soll nun eine Methode sein, die allen berechtigten 10
Anforderungen entspricht? Welche Verbesserungen mufs sie gegen die alten zum Teil unbrauchbaren aufweisen? Auch die Mathematik ist auf höheren Schulen nicht blofs Fachwissenschaft. ....

Wie wir aus dem Wesen der Methode im allgemeinen erkannt haben,[1,2]) wird es nicht sowohl auf den ausschliefslichen Gebrauch einer, als auf eine passende Verschmelzung der brauchbaren und praktisch bewährten Methoden ankommen. ....

Unsere intellektuelle Thätigkeit beruht in der Mathe- 11
matik auf Anschauungen, aus diesen werden die Begriffe gebildet.[3]) Die Prinzipien des sinnlichen Erkennens sind uns a priori gegeben. .... Mathematik keine Erfahrungswissenschaft, daher Raum reine Anschauung a priori. ....

---

[1]) Eine derartige Verschmelzung würde z. B. sein: Auffinden der Lehrsätze genetisch, Beweisführung heuristisch; dann synthetische Rekonstruktion. Das letzte Verfahren besonders bei der Repetition, damit zugleich verbunden eine nach bestimmten Gesichtspunkten geordnete Zusammenstellung einzelner Abschnitte. Man vergleiche hierzu Reidt Anleitung § 10 bis § 15 inklusive.

[2]) Vergl. 24. 74. 142.

[3]) Man vergleiche hierzu Waitz, Lehrbuch der Psychologie, § 46 Über den falschen und wahren Unterschied empirischer und reiner (apriorischer) Begriffe oder Erkenntnis, und § 48, die Abstraktion.

Daraus geht hervor, dafs es vor allen Dingen beim Beginn des mathematischen Unterrichts notwendig ist, durch Anschauung richtige Begriffe zu schaffen, denn alle Definitionen und Deduktionen schweben in der Luft, sobald sie „ohne Anschauung“ leer bleiben. Propädeutisch mufs die .... Methode von der sinnlichen Betrachtung konkreter Gegenstände ausgehen, die *Anschauung* des Schülers unterstützen und dadurch zugleich der Fassungskraft der jugendlichen Geister entgegenkommen..... Keine Abstraktionen..... Der jugendliche Geist mufs beim Beginn des mathematischen Unterrichts schon so beeinflufst sein, dafs der Anschauungssinn bereits angeregt und entwickelt ist. Das „nihil est in intellectu quod non antea fuerit in sensu“ gilt hier in ausgezeichneter Weise.

12 Der Erfindungsgeist des Knaben mufs durch passende Übungen subjektiv für die Anschauungssphäre empfänglich gemacht werden. Hat man aber die „Formen der Anschauung“, die sich dem Vorstellungsvermögen einprägen, gewonnen, so geht man nun auf die erkennbaren Eigenschaften und Beziehungen dieser Körper zu einander über und so findet der Knabe .... geometrische Wahrheiten, die ihm *ohne Beweis* augenscheinlich klar sind. Ist diese Basis durch den propädeutischen Unterricht gewonnen, so kann man ohne Bedenken mit der eigentlichen Wissenschaft einsetzen und dabei auch gewisse Begriffe aus der neueren Geometrie in den Anfang des geometrischen Unterrichts hinübernehmen, ohne fürchten zu müssen, dafs der Schüler Definitionen, die er *nicht begreift, sinnlos auswendig lernt.*[1])

13 Direktoren-Konferenzen des preuss. Staates v. Dr. *Erler.* p. 165. § 115. „Es sei geraten, mit der Geometrie, statt mit

[1]) Wie an anderer Stelle ausgeführt ist, liegt hierin mit ein Hauptgrund für den Widerwillen, den so viele Schüler gegen die Mathematik haben und infolgedessen für den mangelnden Erfolg. Die Grundvorstellungen müssen so befestigt werden, dafs der Schüler aus ihrer Erkenntnis alle Definitionen herzuleiten vermag. Dafs nur definiert wird, was einer Definition bedarf: und dafs auf die Definitionen inhaltlich und sprachlich ein ganz besonderer Wert zu legen ist, sei auch hier noch einmal ausdrücklich hervorgehoben.

der Arithmetik den eigentlich mathematischen Unterricht zu beginnen.

Was nun den Lehrgang selbst betrifft, so sind die Aus- 14
gangspunkte, mit denen der Unterricht beginnt, verschieden.[1]) Zeller beginnt mit der Pyramide, Graser mit dem Modell eines Wohnhauses, Tobler mit dem Lineal, Wedemann mit dem Buche, Scherr mit der Wandtafel, v. Raumer mit den Krystallen, Pestalozzi mit der Zeichnung der geraden Linie, Zerenner mit dem Punkte, Wittstein mit dem Dreieck und Kreise, andre mit dem Würfel und den Dimensionen des Raumes, andre mit der Erklärung und Einteilung der Wissenschaft u. s. w. Hier gilt, wie wir sehen, das Sprüchwort: tot capita, tot sensus. — Fortgang vom Konkreten zum Abstrakten, vom physischen zum mathematischen Körper.

Man frage nicht, was ist eine Linie? was eine Fläche? etc., 15
sondern wie entsteht hier dieselbe,[2]) damit man dem Schüler zuerst die Entstehung der geometrischen Grundbegriffe: Punkt, Linie, Fläche, Körper anschaulich macht. Genaue Definitionen dieser Grundbegriffe zu geben, ist, wie wir gleich zeigen werden, sehr schwierig,[3]) nach unserer Ansicht unmög-

---

[1]) Der Ausgangspunkt mufs jedenfalls ein sinnlich Wahrnehmbares, also ein physischer Körper sein oder besser physische Körper — welche man nun wählt, ist wohl weniger wichtig; ich selbst würde empfehlen von Würfel, Kugel und Walze (resp. eiförmigem Körper) auszugehen, um gleich von Anfang an auf die Einheit der ebenen Fläche, auf die Vielheit der krummen Flächen hinweisen zu können.

[2]) Dieser Ansicht kann ich durchaus nicht beipflichten: nach meiner Meinung sollen diese Begriffe einzig und allein aus der Grenzbetrachtung gewonnnen werden; also auch nicht vom Punkt zum Körper, sondern umgekehrt.

[3]) Genaue Definitionen dieser Grundbegriffe sind allerdings möglich, nämlich aus der Vorstellung der Grenze; etwas anders ist es bei Definitionen von Vorstellungen a priori, wie diejenige der Ebene, der Geraden etc. Hier sollte man auf jede Definition verzichten. Aber in welche jammervolle Lage wäre der Lehrer versetzt, der „durch geschicktes Umgehen oder taktvolles Verschweigen" sich durchlavieren wollte. Jeden Augenblick mufs er eine Frage eines gescheiten Jungen fürchten, es würde ihm gehen, wie dem Dieb, keinen Augenblick sicher — wie könnte er da seines Unterrichtes froh werden und welche Erfolge könnte ein solcher Unterricht haben.

lich, es müssen daher die hier eintretenden Schwierigkeiten durch geschicktes Umgehen derselben und taktvolles Verschweigen aus dem Grunde beseitigt werden, daſs nicht in dem Verstande des Schülers der geringste Zweifel an der Richtigkeit irgend einer mathematischen Definition aufzukommen vermag. Dieses tritt ein, sobald der Schüler sich bewuſst wird, daſs idem per idem erklärt wird[1]) oder eine einzige Eigenschaft einer Raumgröſse als das Wesen derselben hingestellt oder ein Begriff auf einen anderen, der seinerseits eine Erklärung verlangt, zurückgeführt wird etc., kurz: daſs die gegebene Erklärung einen Mangel in sich schlieſst. Wie leicht kann beim Beginn dieser neuen Wissenschaft der auftauchende Zweifel das Interesse des Schülers für dieselbe vollständig vernichten![2]) Zweifel bewirkt leicht Antipathie. — Es wird dann ebenfalls genauer gerade auf das Beispiel der Definition für gerade Linie eingegangen. Es heiſst darin: Diese aufgestellten Definitionen (11) mögen genügen,[3]) um uns zu zeigen, daſs die Erfahrungen von Jahrtausenden nicht hingereicht haben, um dies Problem in irgend einer Weise zu fördern.

---

[1]) Zu solchen idem per idem Definitionen gehört z. B. auch diejenige der Geraden, als einer Linie von einerlei Richtung. Auch der andere hier gerügte Fehler findet sich leider sehr häufig. Der Unterschied zwischen Definition und den aus dem Wesen entspringenden Eigenschaften muſs scharf beobachtet werden. Ein Beispiel, bei dem man gelegentlich den Schüler auf diesen Unterschied aufmerksam machen kann, ist das Parallelogramm. Zur Definition gehört nur das Parallelsein der Seiten: daraus ergeben sich dann als Eigenschaften Gleichheit der Gegenwinkel und Gegenseiten etc.

[2]) Dies deckt sich mit den an anderer Stelle gebrachten Ermahnungen, die Grundvorstellungen ganz besonders zu berücksichtigen, sie zu evidenter Klarheit zu bringen, da gerade ein Mangel an dieser Stelle seinen schädlichen Einfluſs dauernd zeige: infolge von ihm gerade jenes so oft zu beobachtende Versagen im Verlaufe des weiteren Unterrichts einträte.

[3]) Hier sollte man doch auch fragen, warum keine Definition gefunden werden kann. Doch wohl deshalb, weil es für Begriffe, die a priori im Geiste liegen, keine Definition giebt, sondern nur Erklärungen; Erklärungen, die geeignet sind, die a priori im menschlichen Geiste vorhandenen Begriffe zum deutlichen Bewuſstsein zu bringen.

Progr. der städt. h. Ksch. Schwerin. 1878. Ziegel: Methode etc. 1878. Nr. 138.

Erschwerend für den mathematischen Unterricht ist, dafs 16
derselbe vorwiegend den Verstand der Schüler in Anspruch nimmt, so dafs die anderen Geisteskräfte,[1]) Einbildungskraft und Gedächtnis, selbst wenn sie in ziemlicher Fülle vorhanden sein sollten, einen Mangel an ersterem nicht zu ersetzen vermögen. Wenn es daher auch falsch ist, wie Schrader so überzeugend dargethan hat,[2]) dafs zur Mathematik ganz besondre Begabung notwendig ist, so erklärt sich doch aus dieser Eigenschaft das geringe Interesse, welches häufig der Mathematik, namentlich im Anfange, entgegen gebracht wird. Davon ist aber die Folge eine vollständige Unsicherheit in den Elementen, an der schliefslich jeder Erfolg scheitert.

Dafs man auf die eigentümliche Idee eines besonderen 17
mathematischen Verstandes gekommen ist, liegt jedenfalls an der in früherer Zeit oft beobachteten Erfahrung,[3]) dafs in der That von einem unverhältnismäfsig grofsen Teile der Schüler

---

[1]) Die Mathematik mufs sich daher im Anfang nicht an den Verstand allein wenden, sondern Einbildungskraft und Phantasie oder besser Anschauung und Vorstellungskraft ganz besonders in den Kreis ihrer Betrachtungen ziehen. Nach hinlänglicher Übung dieser Kräfte wird der Verstand leicht den abstrakten Stoff verarbeiten. Ein gänzlicher Mangel an Verstand wird allerdings durch nichts anders ersetzt werden können, einem Schüler ohne Verstand wird die Mathematik unverständlich bleiben — aber selbstredend auch jede andere Wissenschaft.

[2]) Erziehungs- und Unterrichtslehre von Dr. W. Schrader. — [p. 521—523.]

[3]) Es wird eine offene Frage bleiben müssen, wie viel Schuld an diesem Übelstande der früheren Einrichtung der Schulen und der sehr offen zur Schau getragenen Verachtung der Mathematik durch die Philologen beizumessen ist. So lange ein Fach als sog. Nebenfach auf dem Lehrplan figuriert, ist die Schuld des Mifserfolges nicht einzig im Fache selbst und seinen Vertretern zu suchen. Vielleicht giebt aber auch Herbarts Wort, „dafs Mathematiker selten aufgelegt sind, sich mit Kindern gehörig zu beschäftigen, ist natürlich“ einen Beitrag zu unserer Frage. Nur müfste man sich klar werden, was Herbart mit „aufgelegt sein“ verstanden wissen will, ob einen Defekt des Wollens oder des Könnens.

auf den Gymnasien in den mathematischen Fächern so gut wie nichts geleistet wurde, und daſs gerade die für die Sprachen am meisten Befähigten oft in der Mathematik nur sehr mäſsige oder gar durchaus ungenügende Kenntnisse besassen. Daran können aber offenbar nur untüchtige und ungeschickte Lehrer sowie unzweckmäſsiger, unmethodischer Unterricht die Schuld tragen.

18 Eine alte Forderung für jeden Unterricht ist, daſs er naturgemäſs sei. Dazu gehört aber erstens, daſs er auf Anschauung beruhe[1]. .... Erst nachdem die Anschauung zum Hauptprinzipe des Unterrichts gemacht worden, sei in der Mathematik allgemein etwas geleistet worden.

19 Namentlich die Anfangsgründe sind ohne Gegenstände oder deren Bilder fast unmöglich zur Klarheit zu bringen. Später, wenn die äuſsere Anschauung zur inneren geworden ist, ist allmählich zur Stufe des reinen Denkens überzugehen, aber auch dann ist oft dasselbe Mittel zu Hülfe zu nehmen.

20 Anstatt in stufenweiser Folge stets vom Leichteren zum Schwereren vorzugehen, schloſs man sich eng an Euklids Elemente an,[2, 3] die ja für ihren Zweck unübertroffen bleiben werden, aber nicht als Schulbuch geeignet sind, da sie nicht Knaben, sondern jungen Männern zum Studium in die Hände gegeben werden sollten.

21 Dagegen lassen sich meiner Meinung nach sehr gute Resultate erzielen, wenn in Quarta der sogenannte wissenschaftliche Unterricht in der Planimetrie ganz gestrichen und da-

---

[1]) Daſs dieser Gedanke mit den Ansichten des Verfassers in Übereinstimmung ist, geht aus vielen Stellen der vorliegenden Arbeit hervor.

[2]) Vergl. 115.

[3]) Hierin liegt, wie auch an anderer Stelle betont ist, der Kern der Frage, ob die Euklidsche Methode für den Schulunterricht zu verwenden sei. Die Euklidschen Elemente entsprechen gar nicht der ersten, der geometrischen Stufe, auch nicht der zweiten, der arithmetischen, sondern wir haben es hier schon mit einer ausgeprägten Verbindung dieser beiden, also der dritten Stufe zu thun. Die Elemente eignen sich daher gar nicht für den Anfangsunterricht — für den sie ja auch von Euklid nicht bestimmt waren — sondern für den Unterricht in Prima etwa.

für ein propädeutischer zur Einführung ni die gesamte Geometrie an deren Stelle gesetzt wird.

Der Lehrer befleifsige sich selbst der gröfsten Klarheit und Präzision des Ausdrucks und halte auch streng darauf bei den Schülern.[1]) 22

Mit der Geometrie ist der Rechen- und Zeichenunterricht in stete Verbindung zu setzen. — Allerdings: Natürlich verfolgen diese beiden Disziplinen noch ganz andere Zwecke, und darf namentlich nicht der Zeichenunterricht nur ein rein geometrischer werden. 23

Viel ist darüber gestritten worden,[2]) ob die analytische, synthetische oder heuristisch-genetische Methode vorzuziehen sei. Meiner Ansicht nach haben alle ihre Vorzüge und ihre Mängel, und es darf nicht einseitig eine derselben ausschliefslich,[3]) sondern es sind in geeigneter Weise am rechten Orte alle anzuwenden. 24

Vortrefflich dient demselben Zwecke das Zeichnen, das den geometrischen Unterricht zuerst einleiten und dann stetig begleiten mufs. 25

Man versuche nichts zu beweisen, was aus unmittelbarer Anschauung folgt.[4]) 26

1887. Progr. Nr. 278. Rprg. Oldesloe. Lichtenberg: Aus der Praxis etc.

---

[1]) Diese berechtigte Forderung wird, wie es scheint, leider noch allzu oft vernachlässigt. Als Beispiel möchte ich nur die folgenden anführen:

Schurig, Elem. d. Geometr. pag. 7: Die äufseren Schenkel der Nebenwinkel bilden einen gestreckten Winkel, sind also gleich $2R = 180^0$.

Und ebenda: Die Summe aller Winkel .... betragen zusammen 2R.

pag. 10: Ecke und Seite verbinden; Seite und Seite verbinden.

Fenkner, Lehrb. d. Geometr. I. (1888): pag. 69: Wenn in einem Viereck die Summe der gegenüberliegenden Winkel gleich zwei Rechte beträgt, so ....

[2]) Vergl. 30. 71. 76.

[3]) Vergl. 39. 60. 63.

[4]) Wie sehr gerade gegen diese Forderung verstofsen wird, davon liefern fast ausnahmslos alle Lehrbücher Beweise. Eine angenehme Ausnahme bildet das öfter zitierte Werk Rausenbergers.

27 Wenn in den letzten Jahren von Pädagogen auch immer häufiger die Überzeugung — wenigstens ausgesprochen wird, dafs für die Aneignung mathematischer Kenntnisse eine besondere Begabung des Lernenden für die Mathematik nicht vorauszusetzen sei, so ist doch der alte Aberglaube noch nicht völlig ausgerottet. . . . .[1]) — Man hat die Erfolge in der Mathematik oft mit denen im Raten von Rätseln verglichen. Wie es Leute giebt, welche ohne besonders beanlagt zu sein, jedes Rätsel schnell raten, jeden Rebus leicht entziffern können, während andere geistig begabtere dies nicht vermögen, so, glaubte man, seien es auch nur gewisse Auserwählte, die sofort die Lösung der schwierigsten mathematischen Aufgaben finden könnten. Wenn dem so wäre, so müfste man freilich bedauern, dafs die Mathematik eine Stelle in unserem Unterrichtssystem gefunden,[2]) ja es wäre unverantwortlich, dafs . . . . von den vorgesetzten Behörden ein bestimmtes Mafs mathematischer Kenntnisse gefordert wird.

28 Am bedenklichsten ist jedenfalls der Mangel an Kenntnissen, welcher darauf zurückzuführen ist, dafs der Schüler dem Unterricht nicht mit Erfolg hat folgen können, und von allen, welche nicht eine eigentümliche mathematische Begabung voraussetzen, wird allgemein anerkannt, dafs die späteren mangelhaften Leistungen der Schüler ihren Grund haben in der ungenügenden Vorbereitung in den ersten Jahren des Unterrichts.[3]) Daher ist es ein wichtiges Erfordernis, dafs der Anfangsunterricht vor allen Dingen sorgfältig erteilt werde und in den Händen dazu befähigter und bewährter Lehrer liege.

29 Damit dieser propädeutische Unterricht im engen Zusammenhange mit dem geometrischen Unterrichte der Quarta stehe, ist es zweckmäfsig,[4]) dafs der Lehrer der Mathematik

---

[1]) Vergleiche das Zitat aus Schillers Pädagogik.

[2]) Sehr richtig!

[3]) Sehr richtig!

[4]) Dafs diese Forderung durchaus zu erfüllen ist, darin werden nicht nur die Fachlehrer der Mathematik übereinstimmen; es finden sich überall die gleichen Forderungen selbst bei vielen praktischen Übungen, wie z. B. bei Reiten und Fechten. Der Fechtlehrer nimmt viel lieber einen

in der Quarta auch den propädeutischen Unterricht in der Quinta erteile, da er am besten beurteilen kann, welche Vorübungen für seinen späteren wissenschaftlichen Unterricht als die angemessensten zu erachten sind.

Über eine Methode, welche bei dem in Quarta beginnenden 30
wissenschaftlichen Unterricht notwendig anzuwenden wäre, scheinen die streitenden Parteien wohl nie einig werden zu können.[1]) Daher kann man vermuten, dafs eine bestimmte Methode wohl nicht die allein richtige ist. Es kommt beim Unterrichten eben viel zu sehr auf die Persönlichkeit des Lehrers und auf die des Schülers an. Wenn auch im allgemeinen bei der ersten Durchnahme des zu Erlernenden die heuristische resp. analytische Methode für die geistige Entwickelung der Schüler die wirksamste ist, so kann es doch bisweilen für das Verständnis der Schüler zweckmäfsiger sein, sich der dozierenden resp. synthetischen zu bedienen .... — Jede Methode kann zu guten Erfolgen führen, wenn sie der Fassungskraft der Schüler angepafst ist, und wenn sich der Lehrer stets davon überzeugt,[2]) ob der Schüler das zu Erlernende begriffen habe.

Es kann nicht die Aufgabe des Unterrichts sein, alle 31

---

in Unterricht, der noch nie einen Speer in der Hand gehabt, als solche, die schon für sich d. h. mit Geübteren, aber immerhin keinen Lehrern gefochten haben. Aus dem gleichen Grunde sind auch die Exerzierschulen meistens wieder vom Schauplatz verschwunden.

[1]) Auch auf dieser Stufe schon wird ein Nebeneinander der verschiedenen Methoden, wie an anderer Stelle angedeutet, wohl am empfehlenswertesten sein. [Entgegen der jetzt durchaus gestellten Forderung der Individualisierung des Unterrichts möchte ich betonen, dafs diese nie so weit gehen darf, dafs der Unterricht das individuelle Gepräge des Lehrenden verliere; der Lehrer mufs meiner Meinung nach ebensosehr, wie durch den Inhalt des Lehrstoffes, durch seine Person auf den Schüler einwirken, dem Unterrichte sein eigenes individuelles Gepräge geben. Die Einwirkung auf den Schüler wird dann eine viel unmittelbarere, lebendigere sein.] Dagegen mufs auf dieser Stufe des Unterrichts die dozierende Methode nur in den allerbescheidensten Grenzen bleiben, ja womöglich ganz vermieden werden.

Vergl. 108.

[2]) Das ist ganz sicher richtig! Es ist aber wohl überhaupt zweifelhaft, ob der Unterricht mit solchem Erfolge möglich wäre.

Schüler so weit zu bringen, dafs sie jede nur mögliche geometrische Aufgabe lösen können.[1]) Die zu lösenden Aufgaben müssen einem bestimmten begrenzten Kreise angehören. .... — Die Aufgaben werden .... in bestimmte Gruppen geteilt .... —

32 Eine weitere Folge des nicht sorgfältig erteilten Unterrichtes ist die ungenaue Ausdrucksweise der Schüler, welche einem der Ziele des mathematischen Unterrichts, der logischen Verstandesbildung, entgegen arbeitet. — Der genaue sprachliche Ausdruck aber — auch hier gilt mens sana in corpore sano — hängt eng zusammen mit der äufserlich sorgfältigen Ausführung der schriftlichen Arbeiten.

1887. Progr. 363. G. Frankfurt a. M. Dr. Schütz: Die gegenwärtige etc. —

33 Schliefslich darf nicht unerwähnt bleiben, dafs Professoren der Mathematik an den Universitäten und technischen Hochschulen weniger eine Erweiterung des mathematischen Lehrprogramms an den Gymnasien verlangten als sicheres Wissen des schon seither üblich gewesenen Lehrstoffs und Gewandtheit in der Anwendung desselben.[2]) So erklärt es sich, dafs die Abänderungen im Lehrprogramme sich weniger auf den Inhalt als auf die Methodik beziehen.

34 11 Hauptmomente. 1) Die Übung im logischen Schliefsen, wie sie bei Beweisen stattfindet; dieser Nutzen, der vielfach als in einziger Linie für Gymnasien in Betracht kommend hingestellt wurde, möge auch hier zuerst angeführt werden.

35 Wie schon erwähnt wurde, beruhen die Vorzüge des revidierten Lehrprogramms weniger auf Erweiterung des Lehr-

[1]) Die Einteilung der Aufgaben in Gruppen, geordnet nach bestimmten Prinzipien, dürfte sich wohl jetzt in jeder besseren Aufgabensammlung finden, so z. B. bei Petersen, Hoffmann, Lieber und Lühmann. Reidt giebt in seiner Aufgabensammlung zwei Teile, den einen nach dem Unterrichtsstoff geordnet, den andern nach Auflösungsmethoden.

[2]) Um ein modernes pädagogisches Schlagwort zu gebrauchen, es handelt sich darum, das Wissen in ein Können umzusetzen.

stoffes als auf Sicherstellung der Erreichung des Lehrziels durch Maſsnahmen von groſsem pädagogischen Wert.

Betonung der Wichtigkeit des mathematischen Unter- 36
richts in den unteren und mittleren Klassen,[1]) indem gewissenhafte Strenge bei der Versetzung in die oberen Klassen gerade bezüglich der Mathematik zur dringenden Pflicht gemacht wird.

Aus dieser Bestimmung geht deutlich hervor, daſs die Regierung den Wert der Mathematik durchaus nicht nach der knappen dafür verfügbaren Stundenzahl bemiſst. Diese echt pädagogische Auffassung wird treffend veranschaulicht durch den von andrer Seite gethanen Ausspruch: „Ein Gymnasium ist keine Fachschule; was gelehrt wird, ist alles gleich wichtig, wenn auch in verschiedenen Portionen zugemessen. Was würde man von dem Apotheker sagen, der da meint, in dem Rezepte des Arztes sei das Volumen oder Gewicht der einzelnen Ingredienzien der Maſsstab ihrer Bedeutung?“ (Siehe Wuttig, Thomas Arnold, der Rektor von Rugby p. 63.)

Besonders wichtig ist in dem revidierten Lehrprogramm 37
die ausdrückliche Betonung der Thatsache, daſs bei richtiger Unterweisung weder zum Verständnis der Elementar-Mathematik, noch zur Erwerbung einer befriedigenden Gewandtheit in der Anwendung des erlangten mathematischen Wissens besondere mathematische Veranlagung, sondern nur gewissenhafter Fleiſs gehört.

In erster Hinsicht ist namentlich auf den Umstand Ge- 38
wicht zu legen,[2]) der schon auf der Berliner Oktoberkonferenz im Jahre 1873 von Bonitz betont wurde, daſs die Schwierig-

---

[1]) Deshalb müſste aber auch die vierte Stunde in Tertia wieder eingeführt werden. Mit drei Stunden wöchentlich kommt man bei den jetzigen Anforderungen nur schwer oder nicht aus.

[2]) Reidt in seiner Anleitung p. 3 führt dies ebenfalls an: „Die an den Schülern der oberen Klassen hier und da beobachtete vollständige Unfähigkeit, dem mathematischen Unterrichte zu folgen, zu deren Erklärung man früher die Hypothese des Mangels an einer vermeintlichen speziell mathematischen Begabung erfunden hat, läſst sich ‘erfahrungsmäſsig fast ausnahmslos auf mangelnde Sicherheit in den Elementen als ihren wahren Grund zurück führen.’“ (Nach Bonitz, in dessen Referat auf der Oktoberkonferenz des Berliner Unterrichtsministeriums.)

keit, welche der Mathematikunterricht in den oberen Klassen zuweilen macht, erfahrungsgemäfs fast ausnahmslos auf elementaren Lücken beruht. Diese Thatsache hängt mit einer Eigentümlichkeit der mathematischen Grundbegriffe sehr wesentlich zusammen..... —

39 Die oft ventilierte Frage, welche Lehrmethoden am geeignetsten seien für den mathematischen (physikalischen) Unterricht an Gymnasien, könnte man sich versucht fühlen, mit dem Voltaire'schen Ausspruch zu erledigen: „Tous les genres sont bons, hors le genre ennuyeux“.....

Die Schwierigkeiten, welche sich bei der sog. sokratischen Lehrmethode im Klassenunterrichte ergeben, wenn dieselbe ausschliefslich angewandt wird, hat 1845 Prof. Weierstrafs, als er noch Lehrer am Progymnasium zu Deutsch-Krone war, in einem Programm „über die sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterricht“ sehr anschaulich geschildert.[1]) Die Forderung dieses ausgezeichneten Mathematikers, dafs der Lehrer die Wissenschaft vor den Augen des Schülers entstehen lassen soll, verdient von allen Fachgenossen wohl beherzigt zu werden.

1887. Progr. Nr. 640. Rg. Braunschweig. — Dr. Dahl: Lehrplan für etc.....

40 Die Frage nach der Unterrichtsmethode drängt sich in den Vordergrund, eine Frage besonders schwerwiegend für diejenigen Klassen, in welchen die Grundlagen dieses Unterrichtsfaches gelegt werden .... dann mufs der Unterricht dahin streben, die Erkenntnis mathematischer Wahrheiten von innen aus dem Schüler heraus zu entwickeln; die heuristische Methode, wie sie kurz bezeichnet zu werden pflegt, ist die einzige, welche durchgreifende Anwendung finden kann und

[1]) Also auch von dieser hervorragenden Autorität wird die genetische Methode empfohlen; aber sicherlich will Weierstrass diese nicht als die allein in Betracht kommende preisen, sondern sie nur ganz besonders hervorheben. In Verbindung mit der heuristischen wird die genetische Methode dem mathematischen Unterricht vorzüglich ihre Dienste leisten. Zu meinem lebhaften Bedauern konnte ich der Weierstrassschen Abhandlung nicht habhaft werden.

auch finden muſs.[1]) Das wäre das Ideal eines mathematischen Unterrichts, wie er erteilt werden soll, bei welchem dem Schüler nicht einmal der Gedanke käme, daſs er etwas Neues erlerne, bei welchem er nur die Empfindung hätte, an Dinge erinnert zu werden, die ihm eigentlich längst bekannt und vertraut gewesen wären.

Jede mathematische Wahrheit soll von dem Schüler gefunden, nicht von dem Lehrer gegeben werden: das gilt nicht nur vom Beweise, das gilt auch vom Lehrsatze. Erlaubt ist jedes Hülfsmittel, durch welches eine unmittelbare Mitteilung der aufzusuchenden Wahrheit umgangen werden kann.[2]) Als nächstes Hülfsmittel bietet sich die unmittelbare Anschauung. So ergiebt sich in der Planimetrie durch unmittelbare Anschauung der Figur, daſs im gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich sind. 41

1884. Progr. Nr. 257. G. Kiel. — Dr. R. von Fischer-Benzon. Die geometrische Konstruktionsaufgabe etc.

In der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts war die Mehrzahl der Mathematiker geneigt, ausschlieſslich im Euklid das wahre Muster der geometrischen Methode zu erblicken,[3]) und 42

---

[1]) Es stimmt das mit der an anderer Stelle mitgeteilten Ansicht überein, daſs das Ideal der geometrischen Beweisführung die Evidenz der Notwendigkeit sei; denn diese Evidenz der Notwendigkeit ergiebt sich eben dann, wenn dem Schüler der Lehrstoff wie seine Verarbeitung naturgemäſs erscheinen, also eine Empfindung in ihm hervorrufen, die der im Zitat ausgesprochenen analog resp. identisch ist.

[2]) So sehr auch ich auf dem Standpunkt stehe, daſs die Anschauung eines der wichtigsten Hülfsmittel beim geometrischen Unterricht ist, so muſs ich doch gerade bei diesem Beispiel die Evidenz der Wahrheit als durch die Anschauung gegeben anzweifeln; wollten wir psychische Momente im mathematischen Unterrichte mehr gelten lassen, als bisher, so würde ich bei diesem Beispiel das angeborene Gefühl der Symmetrie als dasjenige hervorheben, das uns von der Wahrheit des betr. Satzes unmittelbar überzeugt. Dazu bedürften wir aber der Symmetrieaxe.

[3]) Leider dürfen wir uns bei der Beurteilung dieser Frage nicht einmal auf die Zahl der Lehrbücher beschränken, sondern müssen auf ihre Verbreitung noch höheren Wert legen. Bei einer derartigen Statistik ergiebt sich ein ganz gewaltiges Übergewicht der nach alter Methode bearbeiteten Lehrbücher.

ganz ist diese Ansicht noch heute nicht verschwunden. Das beweisen nicht nur eine grofse Zahl der jetzt noch gebräuchlichen Lehrbücher, sondern auch mancherlei Aussprüche in Fach- und Zeitschriften.

43 Kritik von Erlers Ansicht in Schmidts Encyklopädie: Auf die Anschaulichkeit der geometrischen Wahrheiten und Resultate,[1] sowie auf die Schwierigkeit, zu richtigen Resultaten zu gelangen, wird aufmerksam gemacht, aber von dem Einflusse der Geometrie auf die Ausbildung der Anschauung selbst ist wenig die Rede.

44 Erler (Sch. E. p. 928). Die Lösung von Konstruktionsaufgaben kann ebensowenig,[2] wie das Finden einer versteckten Sache, zu einer bestimmten Anforderung gemacht werden. (Längere Ausführung.)

Gut widerlegt von Fischer-Benzon.

45 Wenn Prof. Erler und V. Schlegel meinen, dafs es eine allgemeine Methode zur Auflösung aller möglichen Konstruktionsaufgaben nicht giebt, so mufs man ihnen unbedingt recht geben. Anders würde die Sache aber sein, wenn man aus der ungeheueren Fülle von Konstruktionsaufgaben diejenigen auswählte,[3] welche dem Wissen und Können der Schüler entsprächen, und diese methodisch zu behandeln versuchte.

46 Der Unterricht in der Geometrie soll die Schüler nicht nur im richtigen Schliefsen, also im Nachdenken üben, er soll

---

[1]) Und doch ist gerade die Wechselwirkung zwischen Anschauung und Geometrie von hervorragendem Werte und daher der Einflufs der Geometrie auf die Anschauung oder vielmehr das Anschauungsvermögen mindestens ebenso zu betonen, wie derjenige der Anschauung auf die Geometrie.

[2]) Erler wird wohl inzwischen auch von dieser Ansicht abgekommen sein, die aber gewifs ihre Berechtigung hatte, so lange gerade das Gebiet der Konstruktionsaufgabe in höchst unsystematischer, den Schüler allerdings abschreckender Weise behandelt wurde. Dafs im Bereiche der Schule es sich immer nur um ein beschränktes Gebiet von Aufgaben, nicht um jede beliebige geometrische Aufgabe handeln kann, ist schon an anderer Stelle ausgeführt.

[3]) Dies scheint der allein richtige Standpunkt zu sein. Fischer-Benzons hervorragende Arbeiten auf diesem Gebiete des Unterrichts haben übrigens wesentlich dazu beigetragen, dafs sich die Ansichten zu Gunsten der Konstruktionsaufgabe geändert haben.

in erster Linie auf die Ausbildung ihres räumlichen Anschauungsvermögens wirken. Daneben liefert die Geometrie auch noch reiches Material, an dem der Schüler lernen kann, selbständig Begriffe zu bilden und Beobachtungen zu machen. Auch darf man den Vorteil nicht gar zu gering anschlagen, der dem Schüler daraus erwächst, dafs er lernt, sich mit einiger Sicherheit auf einem Gebiete zu bewegen, das den Anschauungen des täglichen Lebens zum Teil so fern liegt,[1]) und endlich möge man bedenken, dafs die geometrischen Aufgaben die einzigen sind, die ihm eine erschöpfende Behandlung gestatten, und deshalb die einzigen, denen er schon auf der Schule eine Behandlung zu teil werden lassen kann, die auf die Bezeichnung wissenschaftlich Anspruch erheben darf.

Soll der Unterricht in der Geometrie auf d. a. Weise 47
wirken, so ist man genötigt, von Euklid und seinen Nachfolgern nicht unerheblich abzuweichen, man mufs das Vorurteil aufgeben, dafs die bewiesene Wahrheit für die Jugend irgend einen Vorzug vor der anschaulich erkannten habe."[2]) (Vergl. Schopenhauer, Die Welt als Wille und Vorstellung. Lpzg. 1873. I p. 87.)

Im Euklid und in denjenigen Lehrbüchern, welche we- 48
sentlich im Geiste des grofsen griechischen Mathematikers abgefafst sind, werden auch solche Sätze bewiesen (z. B. Euklid III. Buch. Satz 11—12),[3]) deren Richtigkeit sofort durch An-

[1]) Dafs zu diesen Vorzügen noch ein weiterer hinzukommt, darf nicht vergessen werden: ich meine den, dafs der Schüler allein bei den geometrischen Konstruktionsaufgaben die Freude des Erfindens und in hervorragendem Mafse die Befriedigung über erfolgreiche eigene Arbeit haben wird.

[2]) Diese Bemerkung scheint mir von weittragender Bedeutung zu sein. Verschliefst man sich der darin liegenden Wahrheit nicht, so wird man auch der bisherigen Methode des planimetrischen Unterrichts, besonders in den Anfängen, entschieden den Rücken kehren und der Anschauung die Rolle zuweisen müssen, die ihr gebührt.

[3]) Es handelt sich hier um Lehrsätze, die bei einer richtigen Behandlung der Lagenverhältnisse zweier Kreise sich allerdings direkt aus der Anschauung ergeben, wenn man nur die Betrachtung der Bewegung zu Hülfe nimmt. Bei der stofflichen Behandlung werde ich gerade eine ganze Reihe von derartigen Lehrsätzen mit Beweisen ausscheiden, um an ihre Stelle einfache anschauliche Betrachtungen zu stellen. In be-

schauung klar wird, und man hat denkenden Schülern gegenüber einen harten Stand,[1]) wenn man ihnen die Notwendigkeit eines Beweises darthun will. Den strengen Beweis wird niemand im Ernste aus der Welt schaffen wollen; im Verlauf des Unterrichts ergiebt sich ganz von selbst die Notwendigkeit, die logische Kontrolle oder den Beweis zu Hülfe zu nehmen, denn die Anschauung allein reicht bei komplizierten Figuren nicht mehr aus,[2]) und man macht überdies die Erfahrung, daſs die Anschauung täuschen kann.

49 Ein gleich eigentümliches Schicksal hat die axiale Symmetrie erfahren. Es wird schwierig sein, ein Lehrbuch der Geometrie zu finden,[3]) in dem nicht gelegentlich die Eigenschaften symmetrischer Gebilde benutzt würden, und doch giebt es nur verhältnismäſsig wenig Bücher, welche der Symmetrie einen Abschnitt oder gar ein Kapitel widmen.

50 Bedeutsam für den Unterricht in der Geometrie ist die Bestimmung des neuen Lehrplans, wonach in der Quinta geometrisches Zeichnen getrieben werden soll. Diese Beschäftigung kann auch recht wohl in der Quarta in den für die Geometrie bestimmten Lehrstunden fortgesetzt werden. Durch das geometrische Zeichnen hat man Gelegenheit, die Schüler in ähnlicher Weise in die Geometrie einzuführen, wie durch das gewöhnliche Rechnen in die Arithmetik und Algebra; man verschafft ihnen dadurch nicht allein Gewandtheit im Umgehen mit Zirkel und Lineal, sondern man kann ihnen auch, selbstverständlich ohne eigentliche Geometrie zu treiben,

---

schränktem Maſse finden wir entsprechende Änderungen bei Rausenberger in seinem öfter erwähnten Lehrbuch.

[1]) Vergl. 124.

[2]) Man muſs hier auch unterscheiden zwischen der Anschauung a priori und der anschaulich erkannten Wahrheit. Daſs das Dreiseit drei Winkel hat, könnte man vielleicht eine Anschauung a priori nennen; daſs das n seit n Winkel hat zu den Anschauungen rechnen, die erst vermittelt werden müssen.

[3]) Diese Thatsache ist wirklich auffallend, da die Symmetrielehre bei der Behandlung des geometrischen Stoffes wirklich bedeutende Vorteile an die Hand giebt, auf die man ohne weiteres Verzicht geleistet hat. Die Symmetrielehre muſs da, wo die Anschauung eine Rolle spielt, ebenfalls ihrer Bedeutung gemäſs Berücksichtigung finden.

eine Reihe von Kenntnissen anschaulich zu eigen machen, die ihnen später erst begrifflich klar werden.

1888. Progr. Nr. 10. G. Königsberg. Dr. L. Heinze: Der Vorbereitungsunterricht etc.

Zeichnen von Figuren mit Zirkel und Lineal ist jedoch 51
nicht das Ziel unseres Unterrichtes. Die Schüler sollen hier zwar sauber und genau zeichnen lernen und sich im Gebrauch der Zeicheninstrumente üben, aber sie sollen nicht allein zeichnen, es soll „durch Zeichnen von Figuren mit Zirkel und Lineal eine methodische Ausbildung der Anschauung“ erstrebt werden.

Darauf, dafs ein Paar Axiome mehr oder weniger im 52
geometrischen Unterricht vorausgesetzt werden, kommt es .... nicht gerade an,[1]) und es ist richtig, dafs der pädagogische Wert der Euklidischen Beweisführung durch die Anzahl der verwendeten Axiome nicht beeinflufst wird,[2]) wenngleich es die Aufgabe der geometrischen Wissenschaft sein wird, ihre Zahl auf ein Minimum zu reduzieren.

Was nun die Axiome und die damit verbundenen Postu- 53
late anlangt, so knüpft man an „an die im Kinde schon vorhandenen, von Kindheit auf eingewohnten Anschauungen“ und stöfst nicht „jene Grundlagen geflissentlich von sich, als ob sie völlig wertlos und der wahren Wissenschaft nur hinderlich wären“.

Der Hauptgegenstand für den propädeutischen Unterricht 54
wird die Vorbereitung der Erklärungen sein. Wenn wir daran denken, dafs es sich hier um Anschauungen handelt, nicht um Begriffe, werden wir eine Beschreibung der Entstehung geben lassen. Die allgemeine Definition (sowohl die genetische als die deskriptive) wird im späteren Unterrichte gelernt. (Vergl. zur Nieden, Meyer, Weingärtner.)

---

[1]) Das ist sehr richtig; dafs auch Verfasser diese Ansicht teilt, geht aus einer Stelle dieser Einleitung hervor. Es sei auch hier noch einmal erwähnt, dafs E. Müller in seinen Grundbegriffen 24 Grundsätze aufstellt.

[2]) Vergl. Zitat Nr. 182 nebst zugehöriger Anmerkung.

1881. Progr. Nr. 415. Gewerbesch. Remscheid. Dr. Kaiser: Über einige Hauptpunkte etc.

55 Die gedeihliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts ist in nicht geringem Maſse durch das weit verbreitete Vorurteil geschädigt worden, daſs zum Verständnis der Mathematik ein besonderes und eigenartiges Talent erforderlich sei.[1]) Wollte es sich der Lehrer bequem machen, so bot ihm diese Ansicht einen ausreichenden Entschuldigungsgrund, um sich nur mit den wenigen „mathematischen Köpfen" zu befassen und das Gros der Klasse völlig zu vernachlässigen. Der denkfaule Schüler selbst glaubte einen Unterrichtszweig mit Recht perhorreszieren zu müssen, für welchen ihm nun einmal das Talent abgehe, während auf der entgegengesetzten Seite das falsche Dogma einer mathematischen Prädestination zu eitler Selbstüberhebung nahe liegende Veranlassung bot.

56 Mittlerweile ist jene falsche Meinung einer richtigeren Einsicht in demselben Maſse gewichen, wie sich die mathematischen Durchschnittsleistungen an der Hand einer besseren und stetig nach Vervollkommnung strebenden Lehrmethode erfahrungsmäſsig gehoben haben.

57 Daher ist es denn auch nicht im entferntesten mehr fraglich, daſs gerade die mathematischen Disziplinen berufen sind, den jugendlichen Geist an klare Auffassung, an ein folgerichtiges, auf die wesentlichen Punkte der Voraussetzung konzentriertes Denken zu gewöhnen, daſs die Mathematik, ganz abgesehen von ihrem materialen Wert und Inhalt, als formales Bildungselement auf unseren höheren Schulen nicht entbehrt werden kann.

58 Sokrates bei Plato: „Es ist bekanntlich in Bezug auf jedes Lernen,[2]) um besser aufzufassen, ein himmelhoher Unterschied zwischen Einem, der sich mit Geometrie befaſst hat, und dem, der es nicht gethan hat."

59 Die bereits wahrgenommene Hebung der mathematischen Leistungen entspringt nicht zum geringsten Teil dem Um-

---

[1]) Vergl. die Anmerkung zum Zitat Nr. 17.

[2]) Daher auch Platos Wort: *Μηδεὶς εἰσίτω ἀγεωμέτρητος*, das er über der Thür seines Hörsales eingraben lieſs.

stande, dafs die veraltete Ansicht von einer spezifischen Kapazität für Mathematik der besseren Einsicht hat weichen müssen, dafs die früher übliche abstrakte, den jugendlichen Geist förmlich abschreckende Lehrmethode nicht am Platze war.

Die deduktive Methode, welche lange Zeit eine unbe- 60
strittene Alleinherrschaft behauptet hatte, erscheint beim Anfang des mathematischen und zumal des geometrischen Unterrichts völlig verkehrt. Die alte Schule, welche glücklicherweise nur noch vereinzelte Anhänger hat,[1] übergofs sozusagen den Anfänger beim Beginn der Geometrie mit einer Flut von Abstraktionen und Begriffen, zu deren Bildung vorher auf induktivem Wege das nötige Material nicht gesammelt worden war. So war es nicht zu verwundern, wenn trotz aller Definitionen und Deduktionen — um mit Kant zu reden — die Begriffe ohne die Anschauung leer blieben, wenn folglich die Lust und Liebe, welche der unbefangene Schüler der Geometrie nicht weniger wie jedem andren neuen Unterrichtsgegenstande entgegenbringt,[2] gleich zu Anfang erstickt werden mufste.

Gegen einen solchen Kursus könnte eingewendet werden, 61
dafs, da die geometrischen Objekte, wie vollkommen gerade Linien, Kreise, Ebenen u. s. w. in der Erfahrung nirgends anzutreffen sind,[3] für die Geometrie aus der Erfahrung auch

[1]) Zu dieser Ansicht ist es wohl schwer zuzustimmen; es sei denn, dafs unter „alter Schule“ hier noch etwas anderes verstanden werden soll, als das, was wir mit diesem Worte zu verbinden gewöhnt sind.

[2]) Diese Bemerkung scheint sehr richtig. Gerade die Jugend ergreift jeden neuen Gegenstand, der ihr geboten wird, mit einer naiven Frische, die dem Unterrichtsstoff wesentlich zu gute kommt. Dafs im Unterricht ferner oft alles geschieht, natürlich unbewufst, um dieses Interesse möglichst bald in Abscheu zu verwandeln, ist ebenso richtig. Daher mufs dafür gesorgt werden, dafs dieser Übelstand vermieden wird und dies wird geschehen, wenn der Unterricht ein naturgemäfser ist, im geometrischen Unterricht z. B., wenn er an die Anschauung anknüpft, auf sie sich stützt und in ihr, im ganzen Anfangsunterricht wenigstens, sein vorzüglichstes Hülfsmittel sieht. Vergleiche auch die Bemerkungen über Definitionen an anderen Stellen.

[3]) Gerade der Umstand, dafs die geometrischen Objekte nirgends thatsächlich vorkommen, aufser in unserer reinen Vorstellung, spricht dagegen, dafs die Gegenstände geometrischer Untersuchung aus der Er-

nichts zu lernen sei. Es müfste denn sein, dafs John Stuart Mill Recht hätte, welcher in einem besonderen Kapitel seines Systems der induktiven und deduktiven Logik zu beweisen versucht, dafs sich die Geometrie in der That mit empirischen Geraden und Kreisen beschäftige, dafs demnach ihre Definitionen aus der Erfahrung abstrahiert, ihre Axiome in derselben a posteriori begründet seien..... Denn, wenn sich auch die Geometrie .... mit Punkten ohne jegliche Ausdehnung ...., also mit idealen Gebilden befafst, welche sich der empirischen Wahrnehmung thatsächlich entziehen, so ist damit keineswegs ausgeschlossen, dafs der abstrahierende Verstand durch die sinnliche Erfahrung den ersten Anstofs zur Bildung jener transscendenten Vorstellungen und Begriffe erhält.

62 Die gröfsten Schwierigkeiten erheben sich, sobald man es versucht, den Begriff der geraden Linie in eine bündige Definition zu fassen. Hier scheinen in der That diejenigen Mathematiker das Richtigste zu treffen,[1]) welche die Vorstellung

fahrung entnommen sind: weshalb auch die Axiome nicht a posteriori in der Erfahrung begründet sein können. Alles wirklich Dargestellte giebt nur Bilder von geometrischen Objekten und zwar, wie ausgeführt werden wird, nicht einmal — aufser bei den Körpern — reelle Bilder. Die Schwierigkeiten der Vorstellung werden am leichtesten überwunden, wenn man streng daran festhält, dafs wir von den Körpern auszugehen haben und von ihnen aus durch Grenzbetrachtungen erst zu den übrigen Raumgebilden gelangen. Erst nachdem auf diese Weise die Vorstellungen gewonnen sind, können wir nun rückwärts vom Punkt ausgehen und mit Hülfe des Begriffs der Bewegung die höheren Gebilde entstehen lassen.

[1]) Wie sehr Verfasser mit diesen Bemerkungen übereinstimmt, wird sich bei der Betrachtung der Grundbegriffe mit erneutem Gewicht ergeben. Die Gerade gehört zu den Grundbegriffen a priori, deren Vorstellung bei jedem Knaben vorausgesetzt werden mufs und darf. Alle Definitionen kommen schliefslich darauf hinaus, dafs im Grunde angenommen wird, dafs der Begriff der Geraden geläufig sei; und gerade auch diejenige sog. Definition, die jetzt gewissermafsen Mode ist, die Gerade als ideelle Drehungsaxe zu erklären, setzt den Begriff der Geraden voraus. Was die Erklärung der Geraden unmöglich macht, ist, abgesehen davon, dafs wir es hier mit einem Grundbegriff a priori zu thun haben, der Dualismus, der in der Auffassung der Geraden liegt und der unter keinen Umständen entfernt werden kann, ein doppelter Dualismus sogar. Zuerst liegt zu Grunde der Begriff der Richtung und diese ist eine

der Geraden für so ursprünglich und einfach halten, dafs sie sich in einfachere Elemente nicht zergliedern läfst. In diesem Sinne sagt z. B. Tellkampf in seiner Vorschule der Math. § 222: „Unter allen denkbaren Bewegungen eines Punktes A ist die einfachste die in gerader Linie AA. Es ist unmöglich, von einer solchen eine Erklärung zu geben, wodurch ihr Begriff auf einfachere Vorstellungen zurückgeführt würde, da sie zu den unmittelbar gegebenen Grundvorstellungen der Geometrie gehört." Auf keinen Fall kann es angezeigt erscheinen, über einen so schwierigen Punkt mit 11—12jährigen Knaben spekulative Erörterungen anzustellen, welche schliefslich nur geeignet sind, die ursprünglich klare Vorstellung zu verwirren. — .... Ich halte den Begriff der Richtung für so fest und klar in der Anschauung begründet, dafs er, ohne weiter definiert zu werden, der geometrischen Erklärung der Geraden zu Grunde gelegt werden kann. Hienach entsteht die Gerade durch die Bewegung eines Punktes, welcher seine Anfangsrichtung unausgesetzt beibehält. — .... Wenn, sobald von der geraden Linie die Rede ist, jeder Schüler sich eine genaue Vorstellung von derselben zu bilden vermag, so hat der Lehrer mehr erreicht, als wenn er der Klasse eine wohlgedrechselte aber unverständliche Definition samt daraus fliefsenden Lehrsätzen und Folgerungen eingebläut hat.[1]) Indem man den Anfänger pedantisch damit quält, dunkle Redensarten um an sich klare Dinge zu machen, vernichtet man von vornherein das Interesse und damit eine wesentliche Grundbedingung für den sicheren Erfolg des geometrischen Unterrichts überhaupt.

Es ist nicht meine Absicht, im Folgenden auf die Me- 63
thode des geometrischen Unterrichts im Allgemeinen einzu-

---

doppelte, wenn wir die Gerade an sich betrachten; zweitens liegt zu Grunde der Begriff des Abstandes zweier Punkte, der zwar auch ein doppelter ist, aber gerade in der Hinsicht, in der er betrachtet wird, nur als ein einfacher erscheint. Doch hierüber wird im Texte ausführlich gehandelt werden.

[1]) Man vergleiche hierzu an verschiedenen Stellen, wie sehr mit diesen Bemerkungen die Ansichten des Verfassers sowohl als sehr vieler anderer Mathematiklehrer getroffen sind.

gehen und mich etwa über „Euklidische Starrheit", „genetische Entwickelung", „heuristisches Verfahren" u. dergl. weitläufig auszusprechen. Angesichts der individuellen Verschiedenheit von Lehrenden und Lernenden wird man vergeblich nach einer Formel für eine allgemein gültige Methode suchen.

---

64 Pascals Regeln für den mathematischen Unterricht:[1])

1) Nichts definieren wollen, was sich nicht durch deutlichere Ausdrücke erklären läſst.

2) Keinen etwas dunklen oder zweideutigen Ausdruck ohne Erklärung lassen.

3) In allen Definitionen nur völlig bekannte oder bereits erklärte Ausdrücke gebrauchen.

4) Keinen notwendigen Grundsatz übergehen, wie klar er auch an sich sein möge.

5) Nur vollkommen augenscheinliche Axiome zulassen.

6) Niemals etwas beweisen wollen, das an sich so deutlich ist, daſs man es nicht auf etwas deutlicheres zurückführen kann.

7) Behauptungen, die an sich nicht völlig klar sind, durch Zurückführung auf Axiome oder bereits bewiesene Sätze darthun.

8) Niemals eine Zweideutigkeit im Ausdruck benutzen, indem man unterläſst, in Gedanken die Definition zu substituieren, welche ihn beschränkt oder erläutert.

Oesterr. Organisationsentwurf der Gymnasien und Realschulen. 1849. — p. 163.

65 Sollen die wissenschaftlichen Lehrer der Geometrie den

---

[1]) Es ist mir leider nicht bekannt, in welcher Schrift Pascals sich diese Regeln finden: mir sind sie in einer handschriftlichen Aufzeichnung vor Augen gekommen. Jedenfalls haben sie noch jetzt volle Gültigkeit und, wenn sie von Anfang an beachtet worden wären, so würde es sicher um manches im mathematischen Unterricht besser stehen, als es jetzt thatsächlich der Fall ist. Besonders beherzigenswert erscheinen mir Regel 1), 4), 6).

Lernenden keine anderen als die in der Sache selbst liegenden Schwierigkeiten machen, so mufs vor dem Beginn des wissenschaftlichen Lehrgangs die mathematische Phantasie gehörig entwickelt sein, d. h. die Fähigkeit, räumliche Gebilde und Verhältnisse sich genau und sicher vorzustellen, ohne die Hülfe einer Zeichnung ebensowohl, als mit dieser Unterstützung. Diese mathematische Phantasie ist keine ausschliefsende Naturgabe, sondern der methodischen Bildung fähig. . . . .[1])

Herbart. Päd. Schriften I p. 113. (Lpzg. 1873.) 66
Das Anschauen ist die wichtigste unter den bildenden Beschäftigungen des Kindes und des Knaben.

Hubert Müller: Besitzt die heutige Schulgeometrie etc. Metz, Scriba.

Das Resultat der Untersuchung des ersten Kapitels der 67
Geometrie ergiebt,[2]) dafs die Behandlung desselben nicht mehr

---

[1]) Damit spricht sich also auch dieser Entwurf dafür aus, dafs keine besonderen Anlagen für den mathematischen Unterricht erfordert werden.

[2]) Besprochen in H. Z. XVIII. p. 520 durch v. Fischer-Benzon. Es heifst zum Schlufs: „Allen Berufsgenossen, namentlich Fachgenossen, seien sie nun Gegner oder Verbündete des Verfassers, sei das Studium der kleinen Schrift dringend ans Herz gelegt; die Gegner werden dadurch erfahren, dafs nicht Mangel an Ehrfurcht vor dem Hergebrachten die Triebfeder der reformatorischen Bestrebungen ist; die Verbündeten werden dabei Gelegenheit nehmen können sich lebhaft vor Augen zu führen, dafs es keineswegs leicht ist, eingewurzelte Schäden als solche zu erkennen; beide aber müssen dem Verfasser für die gründliche und objektive Darlegung dieser Schäden dankbar sein.“ — Man vergleiche mit der hervorragenden Schrift Müllers eine andere, die denselben Gegenstand behandelt: Dr. C. Heinze, Kritische Beleuchtung der Euklidischen Geometrie. — Berlin 1876 —, die ebenfalls sehr viel Interessantes und Richtiges bietet, wenn sie auch an sachlicher Kritik mit Müllers Schrift keinen Vergleich aushalten kann. An seine Kritik schliefst Heinze eine Bearbeitung der Elemente an, die uns weiter unten noch beschäftigen wird. — Aus seiner kritischen Beleuchtung sei folgende Stelle hier zitiert: „Zu einem konsequenten Denken, zu dem gerade durch die Mathematik die Schüler angeleitet werden sollen, fehlen ihr (der Euklid. Geometrie) demnach die allernotwendigsten Bedingungen, nämlich Klarheit und Natürlichkeit.“ S. f. S.

Euklidisch genannt werden kann. Die Grundlagen sind wesentlich geändert, ohne dafs dieser Änderung die nötige Rechnung getragen ist. .... Es zeigt sich, dafs gerade die äufserliche Nachahmung des Euklid gegenwärtig noch am meisten beliebt ist, obgleich sie in dem schärfsten Widerspruche zu der Änderung der Grundlagen (nämlich der Beseitigung des Prinzips der Starrheit) steht, welche in allen Lehrbüchern angenommen ist.

68 Der Wert des Systems wird hierdurch (nämlich Aufstellung eines neuen Grundsatzes) nicht beeinträchtigt; denn derselbe hängt nicht von der Zahl der Grundsätze ab, sondern von der Wahl derselben und davon, ob das System konsequent auf den Grundsätzen aufgebaut ist oder nicht.

69 Allerdings kann nicht geleugnet werden, dafs die Beweise Euklids schwerfällig sind, aber die Ursache davon liegt nur in den Grundlagen des Systems; die Zurückführung der Lehrsätze auf diese Grundlage ist untadelhaft und begründet den Ruf des Euklidischen Systems in Bezug auf logische Schärfe.

70 Es handelt sich also nicht um eine Reform des Euklidischen Systems, sondern um eine solche unserer Schulgeometrie, welche die Brücke zwischen sich und dem Euklidischen Werke schon abgebrochen hat. .... Die Hochschätzung der Euklidischen Elemente, ja die pietätvolle Liebe zu diesem Werke werden durch die Entwicklung unserer Schulgeometrie nicht geschädigt. — .... Die gegenwärtige Schulgeometrie ist wegen der Veränderung der Grundlagen nicht mehr als dem Wesen nach Euklidisch zu betrachten. .... Die Reform der Schulgeometrie hat jedenfalls in denjenigen Veränderungen volle Berechtigung, welche die Herstellung der Einheit zwischen den Grundlagen und dem Aufbau des Systems bezwecken.

---

71 Gymn. zu Cassel. 1860. Progr. von Ernst: Die Methoden etc.

„Die .... kritische Beleuchtung der euklidischen Geometrie führt unwillkürlich auf den Gedanken, dafs Euklid bei Abfassung derselben sich die eleusinischen Geheimnisse zum Vorbilde gewählt hat und dafs alle Nachfolger dieselbe in gleicher Weise ausschmücken.“

. . . ., so kann wohl kaum ein Zweifel darüber sein, dafs in dieser Disziplin die analytische Methode den ersten Rang einnehmen mufs . . . .; dieses (thätiges und schaffendes Eingreifen in den Denkprozefs selbst) leistet aber hier allein die Analysis,[1]) sie allein gestattet den Lernenden einen klaren Blick in sein Thun und Treiben und liefert über jeden Schritt die genaueste Rechenschaft.

Die Hauptursache, welche jene Unordnung hervorgerufen 72
hat, liegt darin, dafs man bei Anordnung des Materials fast lediglich die Beweismittel im Auge hatte.[2])

Allein nicht nur die Anordnung des Stoffes, auch die Form 73
der Darstellung ist ungenügend für einen fruchtbringenden Unterricht. Die Definitionen und Axiome werden dem Schüler fertig gegeben; der Lehrsatz wird vorgeführt,[3]) die zum Beweise nötigen Hülfslinien gezogen und dieser nun selbst in eine Reihe sich gleichsam verschanzender Behauptungen geführt. Glauben mufs der Schüler am Ende . . . . aber er kann auch nur blindlings glauben. . . . . Künstlich und äufserlich . . . . er hätte gewifs der Behauptung des Lehrers ebensogern geglaubt, wie einem solchen Beweise . . . . Selbstthätigkeit des Schülers bei dieser Methode auf ein Minimum beschränkt. . . . . Ich bin der festen Überzeugung, dafs diese Methode sehr vielen Schülern das Studium der Geometrie verbittert und die tägliche Erfahrung bestätigt es durch die geringe Anzahl

---

[1]) Vergleiche hierzu die verschiedenen Zitate, die sich über diese Frage auslassen.

[2]) Dieser Vorwurf ist es, der gleicherweise von allen Seiten den Euklidschen Elementen gemacht wird, dafs nur darauf gesehen ist, dafs jeder Satz sich aus den vorhergehenden beweisen lasse, aber nicht auf den systematischen Zusammenhang der Sätze selbst untereinander. Darin liegt die Schwäche der Elemente, infolge deren sie als Unterrichtsbuch für den Anfangsunterricht sich als unzureichend erwiesen haben: darin liegt aber auch andererseits ihre Stärke als Muster eines logischen Aufbaues, das unerreicht ist und das diese Elemente durch zweitausend Jahre hindurch ihren alten Ruf hat bewahren lassen.

[3]) Man vergleiche zu diesem Zitat Schopenhauers an anderer Stelle gegebene Ansicht. — Ernst trifft hier mit wenigen Worten die Grundschäden, die der Unterricht durch die Verwendung der Elemente resp. durch die Euklidsche Methode erlitten hat.

derer, welche dem geometrischen Unterricht Interesse abgewinnen.

74 Den Übelständen kann nur durch Einführung der genetischen Methode abgeholfen werden. (Schilderung der genetischen Methode.) Synthetische Behandlung mufs der genetischen folgen.

Schrader: Erziehungslehre.

75 p. 531. — Eine andere Frage ist, ob nicht vielmehr der mathematische Unterricht über die jetzt üblichen Grenzen hinaus nach bestimmten Richtungen hin erweitert werden dürfe,[1]) natürlich unter entsprechender Beschränkung des jetzigen Lehrstoffes. Die Frage mufs insoweit bejaht werden, als die neu hinzutretenden Richtungen geeignet sind, nicht die Summe des Wissens, sondern die mathematische Einsicht und Anschauung zu mehren und hierdurch eine einfachere, lebendigere und eben deshalb festere Durchdringung des bisherigen Unterrichtsgebietes zu ermöglichen. Dieser Vorteil darf aber mit Sicherheit von der beschreibenden und der sog. neueren Geometrie erwartet werden.....

76 § 142. Der Unterricht soll .... nicht ausschliefslich im Wege des demonstrierenden Vortrags, sondern zu einem guten Teile heuristisch erteilt werden. — .... So gestaltet sich die in formalem Bezuge heuristische Methode sachlich zur genetischen um.....

77 § 142. Anmerkung 1. — Überdies handelt es sich nicht um den ausschliefslichen Gebrauch einer, sondern um die geschickte Kombination aller sachlich bewährten Methoden.

Waitz: Pädagogik § 26.

78 p. 405. Da die strenge Form der Wissenschaft dasjenige ist, wodurch die Bedeutung der Mathematik als Unterrichtsgegenstand bestimmt wird, so ergiebt sich von selbst, dafs der Unterricht in derselben einen vorzugsweise behutsamen

---

[1]) Dafs eine so bedeutende Autorität, wie Schrader, sich ebenfalls für eine Erweiterung des geometrischen Unterrichts ausspricht, zitiere ich mit besonderer Genugthuung.

und bedächtigen Gang nehmen mufs, der im Vorwärtsschreiten stets zurückschaut und nach Grund sucht für jedes Spätere in dem Früheren. Er wird sich daher eher noch den Vorwurf der Pedanterie, als den der Flüchtigkeit machen lassen dürfen, da jede kleine Nachlässigkeit in den Anfangsgründen, ja schon jede Unsicherheit in augenblicklicher Beherrschung derselben von Seiten des Schülers entweder die Stetigkeit des Fortschreitens selbst hindert, oder es doch nicht zur Klarheit der Übersicht .... kommen läfst. ....

p. 407. Demgemäfs ist das sinnlich Anschauliche der not- 79
wendige Ausgangspunkt des mathematischen Unterrichts....

Es erfordert dies die Fafslichkeit der Lehre für den Schüler, denn auf allen Gebieten des Wissens mufs die positive Kenntnis einer Summe zusammengehöriger Thatsachen der Begriffsbildung und der Einsicht in den inneren Zusammenhang derselben vorausgehen. Die Thatsachen, welche dem mathematischen Unterricht zur Grundlage dienen, sind diejenigen, welche der früher besprochene Anschauungsunterricht zu lehren hat.

p. 412. Hierbei kann es vom pädagogischen Standpunkte nur 80
gebilligt werden, wenn der Lehrgang der Euklidischen Geometrie mehr und mehr einer solchen Behandlung weicht, die sich bestrebt, ... die einzelnen Lehrsätze mehr nach der Verwandtschaft ihres Inhaltes zu gruppieren, die dem Schüler so leicht entschwindet, wo die Ordnung derselben nur dadurch bestimmt wird, dafs jeder nachfolgende Satz immer einige der vorhergehenden zu seinem Beweise bedarf. (Parallelismus des planimetrischen und stereometrischen Unterrichts verdient alle Aufmerksamkeit.)

p. 416. Die Klage über die häufige Erfolglosigkeit des 81
mathematischen Unterrichtes, welche in der neueren Zeit immer allgemeiner durch die gröfsere Anstrengung und die verbesserte Methode zum Schweigen gebracht zu werden scheint, hat ihre Hauptursache gerade in dem, was die Eigentümlichkeit und den besonderen Vorzug der Mathematik als intellekten Bildungsmittels ausmacht, in ihrer Strenge und Systematik .... — .... Die Schwierigkeit der Mathematik beruht bei der Einfachheit und Fafslichkeit ihrer Grundlagen

für die meisten vorzüglich auf der schlechten Gewöhnung, keinen Gedanken vollständig bestimmt auszudenken und rein festzuhalten. . . . .[1])

Beneke, Erziehungs- und Unterrichtslehre. II. § 122.

82 p. 136. Man hat freilich nicht selten behauptet, auf die Mitteilung dieser müsse man schon deshalb bei den Meisten verzichten, weil für die Mathematik eine ganz besondere Anlage erfordert werde, und nur sehr Wenige dazu organisiert seien, in diesem Unterrichtsgegenstande einigermafsen Fortschritte zu machen. Aber diese Meinung braucht wohl jetzt kaum noch widerlegt zu werden, seitdem durch die Pestalozzische Methode in Hinsicht der elementarischen Formen- und Zahlenlehre der Beweis des Gegenteils geführt ist. Hierdurch sind auch in Hinsicht der übrigen Teile der Mathematik die langgewurzelten Vorurteile entfernt, und die Erkenntnis des Richtigen geöffnet worden. In der That giebt es kaum einen andern Gegenstand, für welchen, wenn der Unterricht zweckmäfsig erteilt wird, weniger eine besondere Anlage erfordert würde, als für diesen.[2])

83 II. p. 135. . . . . „Dies alles zusammengenommen also würde die Mathematik, schon als höchste Musterform der Klarheit, der Gründlichkeit, der Strenge und der Anschaulichkeit in der wissenschaftlichen Konstruktion, einen unschätzbaren Wert für die formale Bildung behaupten.“

„Hierzu kommt nun, in materieller Beziehung, nicht blos der ausgedehnte Nutzen für das Leben, sondern auch, dafs sie in dem weitesten Umfange die meisten übrigen Wissenschaften beherrscht, und insofern als ein wesentliches Element der allgemein-menschlichen Erkenntnis betrachtet werden mufs.“

---

[1]) Was die Einfachheit und Fafslichkeit der Grundlagen betrifft, so dürfte Waitz zu optimistisch gesehen und geurteilt haben. Es ist im Gegenteil sicherlich kein unerheblicher Teil der Schuld am Mifserfolg des mathematischen Unterrichts der Sorglosigkeit bei der Legung der Grundlagen zuzuschieben.

[2]) Beneke steht hier im schroffsten Widerspruch mit Schiller (s. o.). Hätte diese Bemerkung Benekes nicht auch früher schon gröfsere Beachtung verdient?

„Auch von dieser Seite her also gewinnt der Unterricht in der Mathematik eine hohe Bedeutung. Die in ihr behandelten Grundverhältnisse der menschlichen Erkenntnis sind so weitgreifende und interessante, dafs sie Keinem fremd bleiben dürfen, auch der sich nur zu einer mittleren Stufe der Bildung erheben soll. Selbst für den kaum zu denkenden Fall, dafs er niemals in den Fall käme, selbstthätig davon eine Anwendung zu machen, würde ihm doch eine allgemeine Anschauung derselben höchst wichtig, ja unentbehrlich sein."

II. p. 138. „Selbst die eigentliche logische Begriff- und 84
Urteilbildung kommt in dem Gebiete der Mathematik sehr wenig vor;[1]) die logische Schlufsbildung beinahe gar nicht." „Die Mathematik dient nur sehr aus der Ferne als regelnde Norm."

II. p. 234. „Die Mathematik ist derjenige Zweig des 85
Unterrichtes . . . .,[2]) wo, dem idealen Verhältnisse nach, jeder aufmerksame Schüler nicht nur etwas lernen, sondern Alles lernen müfste."

II. p. 236. „Die Mathematik, sagt man, sei überhaupt nur 86
für wenige Eigentümlichkeiten (? der Verf.) gemacht; erfordere ein besonderes angeborenes Talent, welches unter Zehnen kaum Einer habe; ohne dieses werde der kenntnisreichste und geschickteste Lehrer vergebens arbeiten. Nichts kann falscher sein. Vielmehr giebt es entschieden keine andere Wissenschaft oder Kunst, die so wenig ein besonderes, angeborenes Talent erfordert, wie diese. . . ."[3]) „Eine nur mäfsige Geistes-

---

[1]) Beneke schränkt hier das hohe Lob, durch welches er zuvor die Mathematik gefeiert, ein, indem er ihr nur eine bescheidene Wirkungssphäre einräumt. Es scheint mir, als wenn Beneke hier die Mathematik allzu äufserlich in Betracht ziehe, sie zu sehr nach der Quantität ihrer logischen Anwendungen beurteile und würdige, ohne der Qualität die ihr gebührende Bedeutung zu geben.

[2]) Dafs diese ideale Forderung erfüllt werde, schwebt als hohes Ziel wohl allen vor, die bestrebt sind an der Verbesserung der Methoden des mathematischen Unterrichts mitzuarbeiten.

[3]) Es darf wohl nicht mit Unrecht gerade an dieser Stelle auf die Erfolge hingewiesen werden, die Pestalozzi mit seiner Methode errungen hat.

kraft und jene ununterbrochen gespannte Aufmerksamkeit sind die einzigen Erfordernisse."

H. Kern, Grundrifs der Pädagogik. — Berlin 1881.

87 p. 52. „Die Denkformen der Mathematik und des Rechnens sind so mannigfach und namentlich so klar, dafs die formal bildende Kraft dieser Lehrfächer .... besonders hoch anzuschlagen ist."

Herbarts pädag. Schriften ed. Willmann. — Leipzig 1875.

88 II. p. 163. „Aber jede Schule mufs ihre Ehre haben, unabhängig von ihrem Nutzen. Sonst giebt sie dem Fleifse keine Begeisterung.[1])"

„Aus beiden Gründen betrachte ich die Mathematik als den Hauptgegenstand der Bürgerschule. Keine ehrenvollere Gymnastik des Geistes läfst sich finden; und die Spannkraft, welche sie hervorbringt, ist selbst gröfser als die durch die Sprachen des Altertums; ihr Nutzen aber ist unbezweifelt."

89 II. p. 164. Die Kraft der Jugend mufs frühzeitig dahin (zur Mathematik) gelenkt werden. Dies geschieht im allgemeinen durch vorläufige, grofsenteils empirische Beschäftigung mit mathematischen Gegenständen.[2]) Hieher gehören die Anschauungsübungen .... — Das Wesentliche ist Anschauung gegebener mathematischer Formen. .... — Die Wirkung dieser Vorübungen zeigt sich erst später, wenn der mathematische Unterricht selbst eintritt, durch eine weit stärkere Auffassung und durch ein schnelleres Nachdenken, als unvorbereitete Schüler zu leisten pflegen.

---

[1]) Leider drängt sich die Erwägung nach dem Nutzen immer mehr in den Vordergrund. Und zwar kommt nur noch der direkte, unmittelbare Nutzen für sehr viele in Frage; der mittelbare Nutzen der Schule, das eigentliche ideale Ziel der Gymnasien und Universität: zu lehren, was man lernen soll: zu lehren, selbständig arbeiten zu können und zu wollen — Arbeit um der Arbeit willen — das wird als allzu unpraktisch verlacht.

[2]) Diese Forderungen Herbarts werden durch den jetzt eingerichteten propädeutischen Unterricht zum Teil erfüllt. Wie derselbe noch nutzbarer gemacht werden könne, hat Verfasser oben gezeigt.

II. p. 164. Von der Sorgfalt, womit diese Anschauungs- 90
übungen geleitet werden, hängt die ganze Bürgschaft ab, dafs der nachfolgende Unterricht gelingen werde.

II. p. 263. „Dem eigentlichen Gelehrten ist die Mathe- 91
matik schon deswegen unentbehrlich,[1]) weil ohne sie ein gründliches Studium der Naturwissenschaften völlig unmöglich ist.“

„Wer so unglücklich war, niemals wenigstens einen gründlichen Elementarunterricht in Arithmetik und Geometrie zu geniessen, wird bei aller Anstrengung nicht im Stande sein, zu einem vollkommen klaren Verständnis dieser Lektüre (populärer naturwissenschaftlicher) zu gelangen.“

Das ist es eben, was am stärksten für die absolute Notwendigkeit eines gründlichen mathematischen Jugendunterrichts spricht, dafs man ein sehr gelehrter Sprachkenner, ein umfassender Polyhistor, „ja selbst ein scharfsinniger dialektischer Kopf, aufgelegt zu allerlei Subtilitäten und Distinktionen“, sein kann, „ohne sich in irgend eine mathematische Vorstellungsart finden zu können“.

II. p. 264 — „und so kommen sie auf den sonderbaren 92
Gedanken, die Mathematik erfordre ganz besondere Anlagen. Aber Mathematik ist keine auf genialer Individualität beruhende Kunst. Zwar Entdeckungen in ihr macht nur das Genie; hingegen erlernen läfst sie sich so sicher und gewifs, wie irgend eine Erfahrungswissenschaft.“

Es kommt blofs darauf an, vor aller schwierigen Demonstration die mathematischen Elementarvorstellungen auf empirischem Wege zur nötigen Energie und Bestimmtheit zu erheben,[2]) und zugleich an einige mathematische Kunstworte und Bezeichnungen zu gewöhnen.

II. p. 621. Dafs die Anlage zur Mathematik seltener sei, 93
als zu anderen Studien, ist blofser Schein, der vom verspäteten und vernachlässigten Anfangen herrührt.

II. p. 623. Das Wesentliche ist Übung des Augenmafses 94
an Distanzen und Winkeln,[3]) und Verbindung dieser Übung

---

[1]) Aus einer Rezension Drobischs.

[2]) Vergl. Zitat Nr. 94.

[3]) Die wenigen Rechnungen, die im Anfangspensum der Geometrie nötig sind, lassen sich leicht ausführen, auch ohne dafs ein arithmeti-

mit ganz leichten Rechnungen. Der Zweck ist nicht blofs, die Beobachtung für sinnliche Dinge zu schärfen, sondern vorzüglich, geometrische Phantasie zu wecken, und damit das arithmetische Denken zu verbinden. Hierin liegt in der That die gewöhnlich versäumte, und doch notwendige Vorbereitung zur Mathematik. Die Hülfsmittel müssen sinnlicher Art sein. — .... Übrigens versteht sich von selbst, dafs die Anschauungsübungen nicht die Stelle der Geometrie oder gar der Trigonometrie vertreten, sondern diesen Wissenschaften die Stätte bereiten.

95 I. p. 134. Die Mathematik wird zumeist im achten, neunten und zehnten Jahre in Gestalt des ABC der Anschauung erscheinen, und in einem Zeitraume von etwa dreiviertel Jahren, täglich eine Lehrstunde, nebst einigen Übungsstunden verlangen.

Seltener aber, als täglich einmal, dürfen die Lehrstunden nicht sein, wenn man irgend darauf rechnen will, dafs in dem Lehrling die nötige Sammlung des Geistes sich erhalte.

96 I. p. 137. Nicht an Umfang, noch an Gewifsheit und Bündigkeit fehlt es ihr (der Mathematik) dazu (zur Bildung der Geister), aber an systematischer Eleganz und an philosophischer Durchsichtigkeit. Jeder Mangel hierin macht sich beim pädagogischen Gebrauch aufs unangehnehmste fühlbar, aufs nachteiligste wichtig,[1]) — da es für diesen Gebrauch nicht auf die Resultate, noch auf ihre Zuverlässigkeit, sondern auf das Denken selbst und auf dessen musterhaften Gang ankommt.

97 I. p. 139. Anmerk. Hegel erkennt, dafs beim mathematischen Beweise nach Euklidischer Art „die vermittelnden Bestimmungen ohne den Begriff des Zusammenhanges, als ein vorläufiges Material irgendwoher herbeigebracht werden“; die Konstruktion ist daher „ohne Verstand, da der Zweck, der sie leitet, noch nicht ausgesprochen ist.“ —

---

scher Unterricht vorausgegangen ist. Die naturgemäfsen, leichten Anwendungen werden sogar umgekehrt auch eine gute Vorbereitung für den abstrakten Unterricht sein.

[1]) Vergl. Herbarts Auseinandersetzungen über Willkürlichkeit, die sich hieran anschliefsen. — (Mausefallenbeweise.)

Schopenhauer nennt (in „die Welt als Wille und Vorstellung") die Euklidischen Beweise „stelzbeinig und hinterlistig", ja „Taschenspielerstreiche" und wirft ihnen vor,[1]) dafs „bei ihnen die Wahrheit fast immer zur Hinterthüre" hereinkommt.

I. p. 217. Den Übergang (vom ABC der Anschauung zu 98
der Mannigfaltigkeit der Naturgegenstände) selbst zu besorgen, sei nur das Amt des Zeichenmeisters..... Darum ist Kultur der Anschauung eine so notwendige Vorbereitung für alle jene Anatomen (das Wort im weitesten Sinne genommen); — also für Ärzte, Wundärzte, — Mechaniker, Architekten, Zimmerer, — Physiker, Geologen, Astronomen, — und überhaupt für alle Menschen, denen an deutlichen Vorstellungen körperlicher Gegenstände gelegen ist.[2])

Schiller, Handbuch der prakt. Pädagogik.

p. 197. Die Mathematik übt durch die Schulung, welche 99
sie verleiht, den gröfsten Einflufs auf die Erweckung der Verstandeskraft, auf Erzeugung von Klarheit, Schärfe, strenger Folgerichtigkeit im Denken und ist für jeden wissenschaftlichen Beruf ein unentbehrliches Bildungsmittel; aber innerhalb der einzelnen Gebiete könnten manche unnötigen Dinge und viele geradezu schädliche, pedantisch betriebene Übungen beseitigt werden. Die eigentümliche Wirkung der Mathematik liegt in ihren mannigfaltigen, stets klaren und ausnahmslosen Denkformen; die strenge Logik der Urteile stellt sich in der präzisen und klaren Ausdrucksweise dar.

p. 558. Der Unterricht in der Geometrie, welcher auf der 100
unteren Stufe erteilt werden mufs, soll mittels der Anschauung den Sinn für die Form wecken,[3]) das Verständnis für Eben-

---

[1]) Schopenhauer will auch die Anschauung mehr betont wissen. Vergl. Kosack, Schulprogramm Nordhausen 1852.

[2]) Herbart nennt die Bildung des Anschauens weiterhin direkt das „Systematische Band", den „Stamm" fast aller Fertigkeiten.

[3]) Wir haben es hier mit einem Nebenvorteil zu thun, der ohne weiteres Zuthun sich aus dem richtig geleiteten Anschauungsunterricht ergiebt und der wahrlich nicht gering anzuschlagen ist.

mäfsigkeit und Regelmäfsigkeit fördern und zugleich das Sehen und die Hand üben, sowie die ....

---

101 Deinhardt,[1]) Der Gymnasialunterricht. Hamburg 1837. p. 28.[2]) Denn in dem Gymnasium soll nicht diese oder jene Wissenschaft gelehrt werden, sondern es soll die allgemeine Substanz aller Wissenschaften in dem Geist des Schülers entzündet werden, dafs er im Besitz dieses allgemeinen Wesens aller Wissenschaft einen Schlüssel habe zu allen besonderen Wissenschaften und in allen sich findet, auf die er Fleifs und Mühe verwendet.

102 p. 64. In der Mathematik wird der Schüler an beweisendes, gründlich und mit Notwendigkeit fortschreitendes Denken gewöhnt und ein Bild und Beispiel eines wissenschaftlichen Organismus gegeben.

103 p. 161. Den Anfang des systematischen Unterrichts in der Mathematik bildet die anschaulichere Geometrie und von ihr wird zu der abstrakteren und dem reinen Denken näher liegenden Arithmetik fortgeschritten.....

104 p. 176. ...., so wie denn überhaupt zum Betreiben der allgemeinen Arithmetik schon ein hoher Grad von Abstraktion und Verstandesbildung gehört,[3]) wenn sie nicht zum toten, fruchtlosen Formelwesen herabsinken und alle bildende Kraft verlieren soll.

p. 181. Der Gegenstand der Geometrie fällt in die Anschauung und ist daher für den Anfang das Verständlichste. Die Arithmetik erfordert, da sie hier nicht mehr gewöhnliches Rechnen ist, sondern die allgemeinen Zahlen zu ihrem Gegenstande hat, einen viel höheren Grad von Abstraktion. Dieses Abstraktionsvermögen, das zur Auffassung der allgemeinen Zahl, ihrer Verbindungen und Eigenschaften

---

[1]) Diese vorzügliche Pädagogik, die, wie es scheint, ganz vergessen ist, möchte ich allen Kollegen auf das wärmste empfehlen.

[2]) Vergl. auch p. 26.

[3]) Diese Bemerkung ist sehr richtig, wie jeder bestätigen wird, der den Anfangsunterricht in Arithmetik Untertertianern erteilt hat.

nötig ist, wird durch das Studium der anschaulicheren Geometrie gewonnen.

H. Hankel, Die Entwicklung der Mathematik etc. Tübingen 1885.

p. 5. — Dies Vorurteil, welches Männer wissenschaft- 105
licher Bildung oft genug veranlafst, sich zu rühmen, dafs sie niemals ein Jota von Mathematik verstanden haben,[1]) gleichsam, als ob sie sich dadurch den Adelsbrief für Esprit und Geist ausstellen wollten!

Freilich, wie unsere Wissenschaft auf den meisten Schulen unseres Vaterlandes getrieben wird, da ist sie trocken — unglaublich trocken — fast so trocken als die Deklinationen der lateinischen Grammatik.

Nicht eher wird die Mathematik in weiteren Kreisen ihre richtige Würdigung finden, als bis . . . . die unglückselige Meinung beseitigt ist, dafs sie im Unterichte weiter keinen Zweck habe, als den Geist formal zu bilden.

p. 7. Wie Pallas aus dem Kopfe des Zeus entsprang, 106
gewappnet und gerüstet, so tritt die Mathematik hier (in Euklids Elementen) auf. Wunderbare Klarheit und Bestimmtheit der Begriffe, strengste Konsequenz in deren Verbindung, höchste Einfachheit der Darstellung, das sind die Eigenschaften dieses unsterblichen Werkes, die niemals wieder in gleicher Weise vereinigt gewesen sind. Die „Elemente“ des grofsen Alexandriners bleiben für alle Zeiten das erste und, man darf vielleicht behaupten, das einzige vollkommene Muster von logischer Schärfe in den Prinzipien und von strenger Entwicklung der Sätze. Will man sehen, wie eine Wissenschaft auf einer sehr geringen Zahl von anschaulichen Axiomen, Postulaten und schlichten Definitionen, durch einen strengen, an keiner Stelle erschlichenen oder nach fremden Hülfsmitteln greifenden, wir möchten sagen keuschen Syllogismus aufgebaut, und bis in die kleinsten Details ausgebaut werden kann, so mufs man zu Euklids Elementen greifen.

---

[1]) Man vergleiche Zitat Nr. 1 nebst den dazu gehörigen Anmerkungen.

Dagegen: So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit und Anschaulichkeit die wahre Einfachheit auf, welche in der Allgemeinheit der Prinzipien, und die wahre Anschaulichkeit, welche in der Erkenntnis des Zusammenhangs geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich vorstellbaren Lage beruht.

Reidt, Anleitung zum math. Unterricht. Berlin 1886.

107 p. 2. Hierzu kommt ferner,[1]) dafs in der Mathematik ein schlecht geleiteter Anfangsunterricht mehr Schaden bringt, als in irgend einem anderen Unterrichtsfache.

108 p. 5. Unter den Lehrern der Mathematik herrscht, vielfachen Erfahrungen nach zu schliefsen, ein ausgeprägter Subjektivismus. Mag auch in den allgemeinen .... Fragen .... eine Einigung oder wenigstens eine beträchtliche Mehrheit erzielt sein, in der Anwendung auf das einzelne gehen die Ansichten sehr erheblich auseinander.

109 p. 40. Bei Euklid stehen bekanntlich die einzelnen Lehrsätze ohne jede aus ihrem inneren Zusammenhang hervorgehende Ordnung; das Prinzip, auf welchem ihre Reihenfolge basiert, ist nur das, dafs kein Satz eher vorkommt, als die zu seinem Beweise dienenden anderen Sätze bewiesen sind. Im Gegensatz hierzu verlangt die neuere Methodik eine genetische Entwickelung der einzelnen Lehren, sie verlangt also, dafs die einzelnen Teile des Systems, auch untereinander, nach ihrem sachlichen Inhalt thunlichst in Zusammenhang gebracht, dafs das Verwandte neben einander gestellt werde, das räumlich Nachfolgende auch inhaltlich als Folgerung oder weitere Entwicklung des Vorhergehenden erscheine, dafs die Aufeinanderfolge der einzelnen Lehren sich aus dem Gegenstande derselben naturgemäfs ergebe und jede Untersuchung auf die

---

[1]) Aus Reidts Anleitung werde ich nur wenige Zitate an dieser Stelle ausführlich geben, sondern mich beschränken, im Texte auf die betreffenden Abschnitte bei Reidt zu verweisen, da ich wohl voraussetzen kann, dafs, wer die vorliegende Arbeit des Lesens für wert hält, mit einer so hervorragenden Leistung, wie Reidts Anleitung, hinreichend vertraut ist.

folgende als ihre Ergänzung zum Zwecke abschliefsender [Behandlung des betreffenden Untersuchungsgebietes hinweise.]

Es ist selbstverständlich, dafs diese Forderungen unter der Bedingung zu erfüllen sind, dafs das Euklidische Prinzip durch dieselben nicht verletzt werde.

p. 52. Ebenso sind auch in der Geometrie alle soge- 110
nannten populären Beweise zu vermeiden,[1]) welche in der Berufung auf anschauliche Eigenschaften einer speziellen Figur gipfeln, oder auch nur Umschreibungen der Behauptung sind, wenn sie nicht gar sich geradezu im logischen Zirkel bewegen. Die ersteren wird man hier und da mit Nutzen zu weiterer Veranschaulichung und Erklärung gebrauchen können, wie z. B. ....; den strengen Beweis dürfen sie jedoch nie ersetzen.

Zwar sagen die .... Instruktionen für den Unterricht der Gymnasien in Österreich: Der hohe Wert der Anschauung, der „ersten Quelle der Evidenz“, wird noch häufig nicht genug gewürdigt. Viele Wahrheiten der Geometrie können auf dem Wege der Anschauung erkannt werden, und es unterliegt keinem Zweifel, dafs die meisten elementaren Sätze der Geometrie vor jedem Beweise und doch mit der vollen Überzeugung von ihrer Wahrheit aufgefunden worden sind. Auch der geübte Mathematiker erkennt oft in seinen Untersuchungen die Evidenz geometrischer Beziehungen zuerst durch Anschauung und gelangt erst später zu ihrer begrifflichen Vermittelung in der üblichen Form. „Ist doch das anschauliche Wissen,“ wie Locke trefflich sagt, „unwiderstehlich; gleich dem hellen Sonnenlichte zwingt es zu seiner Erkenntnis, sowie die Seele sich darauf wendet; es läfst keinen Raum für Zaudern, Zweifeln und Untersuchen, die Seele ist sofort von dessen klarem Lichte erfüllt.“

p. 71. Wenn eine Kluft zwischen den Gymnasien und 111

---

[1]) Es wird hier gewifs mit Recht auf die Gefahr aufmerksam gemacht, die in einer sog. populären Behandlung der Geometrie liegt. Hier kann man auch sagen: Gott behüte mich vor meinen Freunden, etc. Jedoch wird die Beweiskraft der reinen Anschauung hierdurch nicht getroffen; ja der aus der reinen Anschauung sich ergebende Beweis ist sicherlich auch der strengste.

der Universität einzutreten beginnt, so hat nicht blofs das erstere, sondern auch die Hochschule die Pflicht, an der Herstellung der verbindenden Brücke zu arbeiten. Die letztere darf bei ihren Anforderungen nicht vergessen, dafs die höhere Schule nicht blofs zukünftige wissenschaftliche Mathematiker unter ihren Schülern zählt, sondern eine Mehrzahl von solchen Lernenden, denen weder dasjenige Interesse noch die Begabung für weitergehende mathematische Disziplinen innewohnt, welche der Hochschullehrer von seinen Hörern erwarten mufs.

Sie darf auch nicht vergessen, dafs ein solides wissenschaftliches Gebäude nicht durch Verstärkung der mittleren und oberen Partien auf Kosten der Fundamente errichtet werden kann. Wenn die fortschreitende Wissenschaft immer höhere und höhere Anforderungen an ihre Jünger stellt, so darf sie die Erreichung derselben nicht dadurch erstreben, dafs sie einen Teil ihrer Arbeitslast auf andere Schultern wälzt, welche bereits hinreichend zu tragen haben. .... Darum stimmen wir — ohne deshalb berechtigte Fortschritte ablehnen zu wollen — dem Ausspruche Holzmüllers (H. Z. XVI, 7) zu: „Bei jeder Anstalt liegt eine grofse Gefahr in dem Überschreiten der Lehrziele, in dem Hinaufklettern zu höheren Stufen.“

112 p. 174. Von anderer Seite ist im Gegensatz hierzu verlangt worden, dafs die Geometrie nicht begonnen werden solle, ehe die Schüler die Anfangsgründe der Arithmetik gelernt haben, weil von letzteren schon in den ersten planimetrischen Abschnitten Gebrauch gemacht werde (Kober in d. H. Z. XV, 2). Da schwerlich der Rechenunterricht schon mit Quinta abgeschlossen werden kann, die Anfänge der Arithmetik wohl kaum früher als in Untertertia gelehrt werden können, so würde dies eine erhebliche Verschiebung des Beginnes der Geometrie erfordern. Wir halten dies nicht für notwendig, denn die wenigen arithmetischen Beziehungen, welche in den Anfängen der Planimetrie vorkommen, sind so einfach, dafs ein mit der nötigen Rücksichtnahme auf die Vorbereitung für Buchstabenrechnung erteilter Rechenunterricht hinreichen kann, die Schwierigkeiten zu beseitigen. Man

kann die Sache auch umdrehen und gerade die leichten, an anschauliche Objekte geknüpften arithmetischen Relationen der Planimetrie .... als Vorübung zur Arithmetik behandeln.

113 p. 182. Die Zeit, in welcher unser geometrischer Schulunterricht nur der „starren“ Methode Euklids folgte, liegt noch nicht lange hinter uns, ja sie ragt in einzelnen Ausläufern noch bis in die Gegenwart hinein. Noch vor wenigen Jahren wurde von einem der Leiter des Schulwesens in einer preufsischen Provinz der engste Anschlufs an Euklid im Unterricht gefordert, und infolgedessen kam es vor, dafs an einer Anstalt eine Übersetzung der Elemente Euklids als Lehrbuch in den Händen der Schüler war.

Mager, Wissenschaft der Mathematik etc. .... Mit einer Einleitung Über die Methode der Mathematik etc. ....[1]) Berlin 1837.

114 p. VI. .... Dieselbe Methode, welche man für formale und materiale Bildung als die günstigste anerkennen mufs, stellt sich auch als diejenige dar,[2]) welche den wissenschaftlichen Organismus treuer als jede andere, nämlich genetisch

[1]) Seite VII sagt Mager: Ich schaffte eine Menge mathematischer Lehrbücher und Systeme an, alle waren in der Euklidischen, dogmatischen Weise gearbeitet; berühmt gewordene Aussprüche berühmter Mathematiker, z. B. das bekannte Wort von Kästner, vermehrten meinen Respekt vor Euklids Methode und lange hielt ich den Gedanken für eine Vermessenheit, es könne vielleicht der mathematische Inhalt mit seiner herkömmlichen Form nicht durch innere Notwendigkeit, durch die Natur der Sache verbunden, sondern eins vom andern unabhängig sein; es lasse sich für diesen Inhalt vielleicht eine Form finden, welche der Natur des Inhalts ebenso angemessen, dagegen den Bedürfnissen des lernenden Subjekts viel angemessener sein dürfte .... die dem Gegenstande immanente Methode war auch diejenige, welche dem Lernenden sein Recht läfst; denn es war diejenige, ... welche ich hier objektiv die genetische, subjektiv die heuristische nennen will. — Mager zitiert ausführlich: Bayer, Gegenwärtiger Standpunkt des mathematischen Unterrichts. Aachen 1832. — Ich werde auf diese, sowie die Magersche Schrift noch näher einzugehen haben in dem Kapitel, das speziell den Methoden gewidmet ist.

[2]) Man vergl. auch Mager, p. VIII., die beiden Zitate.

expliziert. .... Die wahrhafte Methode hat ihre subjektive und objektive Seite in vollkommenster Übereinstimmung.

115 p. X. Wenn man mich fragt, was ich denn an Euklid auszustellen habe, so antworte ich: .... an dem Lehrer Euklid aber — wenn man von einem so vorzüglichen Manne annehmen darf, er habe nach seinem Buche, so wie es ist, unterrichtet* —, daſs ein solcher Unterricht nicht der rechte ist.

*.... wenigstens spricht die berühmte Episode in Platons Menon deutlich genug dafür, daſs Sokrates die Geometrie heuristisch lehrte. Ob nun, als Euklids Elemente einmal vorhanden waren, das spätere Altertum die heuristische Methode allmählich vernachlässigt und dafür nach Euklid doziert hat,[1]) kann ich nicht sagen; hat man es gethan, so ist dies nur eins der vielen Zeichen vom Verfall der antiken Kultur.

116 p. XIV. Was aber hauptsächlich für die heuristisch-genetische Methode spricht, ist dieses: Nach ihr ist der Schüler ein Sehender, der nicht nur weiſs, woher er kommt und wo er steht, sondern auch, wohin er geht, während der nach Euklid unterrichtete Zögling alle fünf Minuten eine Binde vor die Augen bekommt, in einem verschlossenen Wagen (er weiſs nicht wie ihm geschieht) eine Station weiter gefahren wird und dann im besten Falle zur Aufgabe erhält,[2]) den Weg nach der letzten Station zurück zu machen. Gesetzt nun, er erlangt eine ausgezeichnete Fertigkeit darin und lernt auch alle Stationen, auf denen er sich successive aufgehalten hat, gut kennen, so ist doch sein ganzes Reisen am Ende, sobald ihn der Lehrer im Stiche läſst und ihn nicht mehr auf eine neue Station bringt. Er hat eben das Reisen selbst nicht

---

[1]) Die Frage endgültig zu entscheiden, wäre nur eine kritische Geschichte des geometrischen Unterrichts im Stande; doch ist es wohl gestattet anzunehmen, daſs Euklids Elemente kein Lehrbuch im gebräuchlichen Sinne des Wortes oder vielmehr kein Schulbuch gewesen sind.

[2]) Die Auseinandersetzungen Magers an dieser Stelle beziehen sich zwar auf die Arithmetik; daſs aber Mager sie auch für die Geometrie gelten läſst, beweist folgender Passus auf p. XIX: „Wie bewunderungswürdig nun aber auch die Elemente des Euklid sind, ..., so dünkt mich doch, daſs der von mir in der Zahlenlehre versuchte heuristisch-genetische Weg auch hier eingeschlagen werden muſs.“

gelernt..... Wogegen der nach der genetischen Methode Unterrichtete vom Lehrer das Prinzip des Fortschritts bekommt.

p. XXV. Keiner glaube, wenn nicht das innere Anschau- 117
ungs- und Denkvermögen der Jugend an scharf bezeichneten Gegenständen der äufseren Anschauung erweckt und geübt, und das Urteil eine Zeit lang durch das Zeugnis der Sinne vermittelt und so dem Gedanken eine Stütze geboten worden ist, dafs irgend ein Schüler zum wissenschaftlichen Studium der Geometrie befähigt sei.

J. K. Becker, Zur Reform des geometr. Unterrichts. — Wertheim a. M. 1880.

p. 3. Seit dem Anfange dieses Jahrhunderts hat man 118
von sehr verschiedenen Standpunkten aus Versuche gemacht, die Geometrie aus den starren Formen zu befreien, in die sie durch Euklides gezwängt worden ist. Alle diese Versuche gingen, wie neuerdings wieder hervorgehoben wurde (in dem Aufsatze: Zur Reform d. geom. Unterr. Von W. Fiedler in der Vierteljahrsschrift der Züricher Naturforschenden Gesellschaft. Jahrg. 1877 p. 82—97), von der Thatsache aus, dafs der Erfolg des geometrischen Unterrichts nach der Methode des Euklides in allen Schulen ein verhältnismäfsig geringer ist, und auch die besten Schüler nicht den Eindruck eines wohlgeordneten Ganzen davon tragen, sondern vielmehr nur eine Fülle leicht verlierbarer Einzelheiten.

p. 3. Wenn nun aber auch ungeachtet der gröfsten 119
Rührigkeit auf diesem Felde seit fast 70 Jahren noch keine Methode dadurch allgemeine Anerkennung gefunden hat, dafs sie stets und überall die wünschenswerten Erfolge erzielt,[1]) so ist es doch eine entschiedene Verkennung des Geleisteten, wenn Herr Professor Fiedler sagt, das Übel sei auch heute noch dasselbe und es sei eine unbestrittene Thatsache der Pädagogen, „dafs gute Erfolge in der Geometrie sehr selten sind unter den Schülern aller Schulen."[2])

---

[1]) Vergl. 120.

[2]) Becker fügt hinzu, dafs Mifserfolge in der Geometrie nach seiner

120 p. 4. Waren aber vor 50 Jahren Lehrer der Mathematik, die Erfolge aufweisen konnten ... noch eine grofse Seltenheit, so ist doch inzwischen die Verbesserung der Methode so fortgeschritten, dafs bei der allerdings noch nicht überall hingedrungenen Kenntnis dieser Fortschritte nur einiges pädagogisches Geschick dazu gehört, um auch in der Geometrie ganz gute Erfolge zu erzielen. Neben der noch sehr verbreiteten Unkenntnis dessen, was von den verschiedensten Seiten für die Verbesserung der Methode des geometrischen Unterrichts bereits geleistet worden ist, und neben der Macht der Gewohnheit, welche die Meisten an dem bisher befolgten Gange des Unterrichts mit Zähigkeit festhalten läfst, sind es freilich noch einige tief eingewurzelte und von in hohem Ansehen stehenden pädagogischen Autoritäten gehegte und genährte Vorurteile, welche sehr oft die Erzielung der gewünschten Erfolge erschweren oder ganz unmöglich machen.

121 p. 4. Man hat der Geometrie des Euklides hauptsächlich zwei Vorwürfe gemacht: 1) Sie giebt kein innerlich zusammenhängendes Ganze, sondern eine Fülle von Sätzen, die nur dadurch äufserlich verbunden sind,[1]) dafs der Beweis für die Richtigkeit eines folgenden Satzes die Anerkennung der früheren voraussetzt. 2) Sie giebt überall nur Erkenntnisgründe, wo man Realgründe sucht; d. h. es wird immer nur gezeigt (oder besser, man wird überall durch eine lange und schwer zu verfolgende und noch schwerer zu behaltende künstliche Schlufskette überführt, zuzugeben), dafs ein Lehrsatz

---

Ansicht ihren Grund darin hätten, „dafs der Lehrer sich die bisher gemachten Fortschritte und Verbesserungen in der Methode nicht angeeignet hat" oder „es liege an Gründen, die mit der Methode nichts zu thun haben."

[1]) Becker fügt hinzu: In der That mufs einem mit wissenschaftlichem Sinn und nicht blos Wifsbegierde begabten Schüler nach Durcharbeitung des Euklides oder eines in dessen Geist ausgearbeiteten Lehrbuchs der Geometrie zu Mute sein wie dem jungen Wilhelm Meister, als er durch ein Loch in dem Vorhange des Puppenspiels gesehen hatte. „Nachdem ich etwas erfahren hatte — sagt Wilhelm — kam es mir erst vor, als ob ich gar nichts wisse, und ich hatte Recht; denn es fehlte mir der Zusammenhang, und darauf kommt doch eigentlich alles an."

richtig ist, während man nirgends Einsicht in den inneren Zusammenhang der in den einzelnen Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften der Figuren erhält, durch die uns erst klar wird, warum er richtig ist.

p. 5. Nach Anführung der bekannten Stelle aus Stei- 122
ners Einleitung zu seiner Abhängigkeit geometr. etc. heifst es:

Diese Worte beziehen sich zwar nur auf die projektivische Geometrie,[1]) und wenn Herr Fiedler deshalb zu dem Schlusse kommt, die Reform der Geometrie werde erst eine vollendete sein, wenn die ganze Geometrie projektivische Geometrie geworden sei und durchweg „projizierend verfahre", so scheue ich mich nicht, diesen Weg zur Reform der Geometrie für einen Irrweg zu erklären, so lange nicht eine wirkliche Ausführung dieser Reform zugleich ihre Möglichkeit und Zweckmäfsigkeit vor Augen stellt. Was in diesem Sinne wirklich bereits versucht worden ist, zeigt sich bei näherer Prüfung, wie zu erwarten war, als vollständig mifslungen; namentlich, wenn man als Mafsstab die auf diesem Wege erzielten Erfolge bei der Mehrzahl der Schüler zu Grunde legt.

p. 14. Am schlimmsten wirkt dieses pedantische Drillen 123
in Demonstrationen und Definitionen, wenn man damit zu früh beginnt. Vor der Obertertia sollte nach meiner Ansicht der geometrische Unterricht höchstens im Anschauungsunterricht und geometrischem Zeichnen bestehen.[2]) Hat der

---

[1]) Ich kann mich der Ansicht Beckers nur anschliefsen. Die Methode des geometrischen Unterrichts auf den höheren Lehranstalten wird immer eine andere sein müssen, als die rein wissenschaftliche der Universitäten, und Fiedler geht entschieden zu weit, wenn er verlangt, dafs durchweg projizierend verfahren werden müsse. Wie viel wirklich ausführbar und zweckmäfsig ist, zeigt ungefähr der Versuch Hubert Müllers. Demgegenüber sind die weiter oben erwähnten warnenden Worte Günthers und auch Thaers nicht unbeachtet zu lassen.

[2]) Ich konstatiere mit besonderer Genugthuung, dafs nach diesen Worten Beckers Ansicht über den geometrischen resp. planimetrischen Unterricht mit der meinigen übereinstimmt. Ja Becker geht sogar noch weiter und will vor Obertertia keinen wissenschaftlichen Unterricht; die Konsequenzen aus einer solchen Anordnung werden nicht gezogen: es können aber sicherlich keine anderen sein, als diejenigen, die ich in meinen Thesen ausgesprochen habe.

Schüler erst einmal durch bloſse Beobachtung die Zusammengehörigkeit gewisser Eigenschaften bei einfachen selbst konstruierten Figuren kennen gelernt, so wird er schon geneigter sein, einer wissenschaftlichen Darlegung dieses Zusammenhangs zu folgen.

124 p. 13. „Um die Methode der Mathematik zu verbessern, wird vorzüglich erfordert, daſs man das Vorurteil aufgebe, die bewiesene Wahrheit habe irgend einen Vorzug vor der anschaulich erkannten, oder die logische, auf dem Satze vom Widerspruch beruhende vor der metaphysischen,[1]) welche unmittelbar evident ist, und zu der auch die reine Anschauung des Raumes gehört.“ Diese Worte des groſsen Frankfurter Philosophen .... kennzeichnen das wichtigste und zugleich verbreitetste der Vorurteile, welche einer gedeihlichen Wirksamkeit des Lehrers der Geometrie oft im Wege stehen. ....

Bischoff, Über Zweck und Art des math. Unterrichts a. d. Gymnasien. Amberg 1847.

125 p. 3. Die ältere, bis vor wenigen Jahren in allen Schulen üblich gewesene, zum Teil noch übliche Methode ist wohl jedem, der einmal auf den Schulbänken seine Jugend verbracht, wenn auch nicht bekannt, doch in gutem (?) Andenken:[2]) der tote Mechanismus derselben hat jeden so manche Stunde seines Jugendlebens gelangweilt, ihre durchgängige Unklarheit dem Strebenden das Studium der Mathematik verleidet, den Gleichgültigen über seinen gänzlichen Mangel an Fortschritten leicht getröstet, die Erfolglosigkeit des Studiums endlich, die bei solchen Elementen unvermeidlich war, die Mathematik überhaupt in schlechten Kredit gebracht.

126 p. 8. Im förmlichen Gegensatze hierzu erfordert die Geometrie Selbstlernen, ein eigentliches Studium, daher bloſses

---

[1]) Vergl. Zitat Nr. 149.

[2]) Das vernichtende Urteil, das hier über die frühere Methode des mathematischen Unterrichts gefällt wird, kann nicht übertrieben erscheinen, wenn man die seltene Übereinstimmung konstatiert, die in dieser Frage herrscht. Wenn B. meint, daſs die Methode zum Teile noch üblich sei, so darf nicht vergessen werden, daſs dieser Aufsatz aus dem Jahre 1847 stammt.

Talent ohne Fleifs nicht ausreicht,[1]) wohl aber angestrengter Fleifs selbst dem mittelmäfsigen Talente bei der steten und gleichförmigen geistigen Übung aufzuhelfen vermag, für welche Behauptung jeder aufmerksame Lehrer der Mathematik in seinem Schülerkreise schon mehrfache Belege gefunden haben wird.

p. 9. Jedem nämlich, der von anderen Doktrinen her 127
einen Sinn für Wissenschaftlichkeit mitbringt, fällt der beinahe gänzliche Mangel an logisch-richtiger Durchbildung der Geometrie auf,[2]) der sich in der Unhaltbarkeit der Definitionen, wie im Durcheinander der einzelnen Lehren und Lehrsätze in allen vorhandenen Lehrbüchern durchweg offenbart.

Bielmayr, Über den Math.-Unterricht an unseren Gymnasien. Aschaffenburg 1870.

p. 11. Sollte dagegen jemand fragen, ob nicht etwa die 128
übrigen Teile der Elemente in das Unterrichtsprogramm aufgenommen werden sollten, damit doch wenigstens die Elemente vollständig erlernt würden, so würde ich ebenso entschieden mit Nein antworten und zwar aus Gründen,[3]) die .... teils darin liegen, dafs .... die für unsere Wissenschaft verfügbare Zeit ohnedies für das gegenwärtige Pensum streng genommen nicht hinreicht, und selbst, wenn sie vermehrt

---

[1]) Die Gründe gegen das veraltete Vorurteil der besondern Begabung finden sich hier — wenigstens was die Geometrie betrifft — äufserst treffend und klar ausgesprochen.

[2]) Die Unhaltbarkeit der Definitionen zeigt sich doch nur da, wo versucht wird, an sich klare Begriffe, die a priori im menschlichen Verstande liegen, zu definieren. Gegen die logisch-richtige Durchbildung der Geometrie wird im allgemeinen kein Einwand erhoben, insofern in der Euklidschen Geometrie ein logisches Prinzip vorhanden ist und strikte durchgeführt wird. Es handelt sich bei den Vorwürfen gegen Euklid doch um den inneren, geometrischen Zusammenhang.

[3]) Hierin liegt das punctum saliens; intensiverer Unterricht wird in seinen Folgen sich stets viel wohlthätiger zeigen als einer, der auf Extension hinausgeht. Wer in einem auch nur beschränkten Teile einer Wissenschaft intensive Studien gemacht hat, wird leicht im Stande sein, weiter zu arbeiten, und auch auf andere Gebiete sich zu verbreiten: während der extensive Unterricht die Gefahr der Oberflächlichkeit und infolgedessen des Nicht-Könnens in sich birgt.

werden würde, besser auf Vermehrung der Intensität als auf Vergröfserung der Extension verwendet würde.

129 p. 18. Die ziemlich verbreitete Ansicht aber, als ob zur Aneignung des bei uns verlangten Teils der Elementarmathematik besondere mathematische Fähigkeiten erforderlich seien, habe ich schon im Vorhergehenden nicht nur gemäfs der dort angeführten Erklärungen von Snell, sondern auch auf Grund von mehr als zwanzigjähriger eigener Erfahrung, teils im öffentlichen, teils im Privatunterricht, als vollständig irrig bezeichnet.

130 p. 19. Es stürmen nun auf ihn zwei neue Fächer, allgemeine Arithmetik und Geometrie,[1]) auf einmal herein. Jedem von beiden sind nur zwei wöchentliche Stunden zugewiesen, was die Kontinuität des Unterrichts bedeutend beeinträchtigt.

131 p. 21. Ich habe im Vorhergehenden angedeutet, dafs ich den gleichzeitigen Beginn des Unterrichts in der allgemeinen Arithmetik und Geometrie mifsbillige — nicht ebenso verwerfe ich die gleichzeitige Behandlung dieser Fächer.[2]) .... Niemand wird bestreiten, dafs die Betrachtung der diskreten und stetigen Gröfsen einen Gegensatz darbietet, welcher kaum gröfser gedacht werden kann, während anderseits die Arithmetik die Grundlage der gesamten Mathematik bildet. Diese Umstände allein scheinen mir schon hinreichend, um sich gegen den gleichzeitigen Beginn der beiden Fächer zu erklären. .... Meine Ansicht geht dahin, dafs man das erste Jahr ausschliefslich auf allgemeine Arithmetik verwenden, im zweiten Jahre die Geometrie dazu nehmen und von da an die beiden Fächer nebeneinander behandeln solle.

---

[1]) Dieser gleichzeitige Beginn von Arithmetik und Geometrie hat ja nach dem neuen Lehrplan aufgehört; dafür sind der Mathematik überhaupt aber auch nur drei Stunden in Tertia zugewiesen.

[2]) Hier treten die Ansichten Bielmayrs in den schärfsten Gegensatz zu den meinigen; während auch er gegen den gleichzeitigen Beginn der beiden mathematischen Unterrichtszweige ist, will er jedoch mit der Arithmetik begonnen haben. Meine Bedenken gegen eine derartige Anordnung des Unterrichts habe ich weiter oben dargelegt; hier will ich nur noch einmal wiederholen, dafs man die wenigen arithmetischen Regeln, die man im geometrischen Anfangsunterricht braucht, sehr wohl in diesem beiläufig geben kann.

p. 22. Dagegen wird nach meiner Erfahrung die Geometrie schneller vergessen als die Arithmetik,[1]) und von denjenigen, welche das Gymnasium verlassen haben, giebt es viel mehr solche, welche noch im Stande sind, Gleichungen aufzulösen, als solche, welche noch Beweise für geometrische Sätze oder Auflösungen von Aufgaben zu Stande bringen, ein Umstand, der ohne Zweifel dafür spricht, dafs das Studium der Arithmetik ein intensiveres und darum fruchtreicheres gewesen war, als jenes der Geometrie. 182

Vergleiche hierzu Brenneke, Vorrede zu seiner Einführung in das Studium der darstellenden Geometrie p. 3: „Es ist eine (unter den Lehrern der Mathematik) bekannte Erfahrung, dafs es viel leichter ist, gute Erfolge bei den Schülern im arithmetischen Unterrichte zu erzielen, als im geometrischen.“[2])

p. 26. Ein andrer Umstand, welcher verhindert, dafs der mathematische Unterricht an unseren Anstalten den wünschenswerten Erfolg erziele, ist, wie ich ebenfalls schon früher angedeutet,[3]) das Mifsverhältnis zwischen dem Pensum und der für die Behandlung desselben angewiesenen Zeit. Ich bin der Ansicht, dafs, wie es Dr. M. Ohm verlangt, der die Verhältnisse aus eigener Erfahrung beim Unterrichte kennt, täglich eine Stunde notwendig ist, um die bei uns vorgeschriebenen 183

---

[1]) Der wunderbare Umstand, auf den hier aufmerksam gemacht wird, mufs meiner Ansicht nach in der schärfsten Weise als eine Folge der verkehrten Methode im geometrischen Unterricht hervorgehoben werden. Er spricht eine beredte Sprache für die Unnatur in der Methodik des Unterrichts, der sich auf die Anschauung gründet, die doch wahrlich im Verlaufe des Lebens nicht wieder verloren geht.

[2]) Dies ist leicht erklärt, wenn man der Sache auf den Grund geht. Der arithmetische Unterricht wird schon lange so erteilt, dafs die Aufgabe im Mittelpunkt des Unterrichts steht, dafs fortwährende Übungsbeispiele dazu dienen, die wenigen Regeln einzuprägen. Wie anders dagegen im geometrischen Unterricht!

[3]) Da das Verlangen nach einer solchen Stundenzahl auf den humanistischen Anstalten ohne Erfolg gestellt werden würde — und zwar mit Recht — so handelt es sich eben darum, den Stoff einzuschränken oder eine andere Verteilung vorzunehmen. Jedenfalls ist das Verlangen nach intensivem Unterricht demjenigen nach extensivem gegenüber zu bevorzugen.

mathematischen Wissenschaften (gemeine Arithmetik, allgemeine Arithmetik (Algebra), ebene Geometrie, Trigonometrie, Stereometrie, Mechanik und Astronomie) mit gutem Erfolge für die Mehrzahl der Schüler zu betreiben.

p. 17. Es fällt mir nicht ein zu bestreiten, daſs das vorgeschriebene Pensum in der gegebenen Zeit durchgenommen werden könne, aber es wird mir kaum ein erfahrener Fachmann widersprechen, wenn ich behaupte, daſs bei den gegenwärtig bestehenden Verhältnissen nicht zugleich auf hinreichende Einübung des Erlernten und die Bedürfnisse der schwächeren Schüler die zu einem wirklich befriedigenden Erfolge notwendige Rücksicht genommen werden kann.[1])

Bauernfeind, Über den Einfluſs der exakten Wissenschaften auf die allgemeine Bildung etc. München 1869.

134 p. 5. Die stete Gewöhnung an logisches Denken bewahrt vor den Verirrungen einer allzuregen Einbildungskraft.

135 p. 6. Selbst die ausgebreitetste Kenntnis des klassischen Altertums und der modernen schönen Litteratur allein gewährt keine ausreichende allgemeine Bildung mehr, wenn man unter dieser die Fähigkeit versteht, in fremde Gebiete mit klarem Blicke zn schauen und deren Beziehungen zu dem eigenen Beruf zu erfassen.

136 p. 6. Die allgemeine Bildung, welche uns den Umschwung in dem materiellen und sozialen Leben, in den Urteilen und Anschauungen des heutigen Menschengeschlechts .... begreifen läſst, ist von den exakten Wissenschaften zu erholen.

137 p. 7. Es ist noch immer die Ansicht verbreitet, daſs das Studium der Mathematik zu schwierig und nur besonders begabten Köpfen zugänglich sei. War diese Ansicht jemals richtig, heute ist sie es nicht mehr.

138 p. 8. Die Mathematik hat in allen Gebieten des mensch-

[1]) Die Wichtigkeit einer solchen Übung hebt auch Dr. Elsperger hervor, indem er sagt: „Durch nichts unterscheidet sich der schlechte Lehrer von dem guten mehr, als dadurch, daſs jener nur doziert, dieser ununterbrochen einübt.“ (Dazu gehört aber vor allem die hierfür notwendige Zeit. Bielmayr.)

lichen Wissens, wo es sich um meſsbare Dinge handelt, mitzureden, und da diese Gebiete unbegrenzt sind, so ist auch die Zahl ihrer Anwendungen unbegrenzt, und sie müſste schon deshalb für die allgemeine Bildung höchst wertvoll sein, selbst wenn sie kein formales Element in sich trüge. Aber die Mathematik ist ein formales Bildungsmittel, wie kaum ein anderes. Denn sie geht von den einfachsten Grundvorstellungen aus, dringt auf eine genaue und scharfe Verbindung derselben, auf strenge Ordnung in der Aufeinanderfolge der Schlüsse, kurz auf jene Sicherheit in der Erkenntnis einer Wahrheit, welche wir mit dem Ausdrucke „mathematische Gewiſsheit" zu bezeichnen pflegen. Sie ist der geeignetste Gegenstand zur Übung des Verstandes im Zerlegen und Verbinden von Begriffen und ermöglicht die höchste Entwicklung der Anschauungs- und Urteilskraft. Da sie überdies von dem einmal Begriffenen stetig zu den daraus sich ergebenden Folgerungen führt, so erzeugt sie mehr als jede andere Wissenschaft in dem Studierenden das Gefühl, als ob seine Kenntnisse organisch von selbst sich entwickelten, und diesem Gefühle entspringt dann die Lust des eigenen Schaffens und der selbständigen Erfindung neuer Wahrheiten[1]) — das letzte Ziel, welches der mathematische Unterricht erreichen kann. . . . . Überdies ist der Mathematik auch eine ethisch bildende Kraft nicht abzusprechen, insofern sie den Willen stärkt und zu Ausdauer, Wahrheitsliebe, Gründlichkeit und Selbständigkeit fortwährend antreibt.

Korneck, Genetische Behandlung etc. — Kempen. 1879.

p. 5. Einerseits bezieht sich die Verschiedenheit der An- 139
sichten auf die Ausdehnung des auf dem Gymnasium zu behandelnden Gebietes der Mathematik. Da giebt es Stimmen, welche die sphärische Trigonometrie, andere, welche die analytische Geometrie und die Anfänge der Differentialrechnung

[1]) Die Lust des eigenen Schaffens und die Freude an der selbständigen Erfindung neuer Wahrheiten ist allerdings ein nicht oft und eindringlich genug hervorzuhebender Vorzug des mathematischen Unterrichts vor jedem andern.

auf den Gymnasien behandelt wissen wollen; wieder andere wollen die „neuere Geometrie“ dem Lehrplane einfügen, noch andere befürworten eine elementare Behandlung der Kegelschnitte, wobei wieder die Ansichten der Art auseinandergehen, dafs von einer Seite der analytischen, von der anderen der synthetischen Behandlungsweise der Vorzug gegeben wird.

140 p. 5. Man „prüfe alles und behalte das beste“ und man wird bei unparteiischer Beurteilung wohl zu dem Resultate kommen, dafs die alte Methode ja auch ihr Gutes habe, welches man durchaus nicht gering schätzen dürfe, dafs aber auch das Alter allein nicht einen Anspruch auf Unfehlbarkeit gebe, und dafs daher manches zeitgemäfs umzugestalten sei. (Vergl. Hauck-Tübingen „dafs es sich um eine Reformierung der Euklidischen im Sinne der neueren Geometrie handle“.)

141 p. 6. Nicht das Schwierige des neuen Gegenstandes ist es, was den Quartaner abschreckt, nicht gröfsere Anforderungen werden an seinen Verstand gestellt,[1] ....; nur die Neuheit der Methode ist es, welche als eine ungewohnte dem Schüler Schwierigkeiten bereitet .... — Zum Teil abgeschreckt, zum Teil gelangweilt von der Behandlung der Anfangsgründe der Mathematik nach Euklidischer Weise verlieren die Schüler die Lust zur Sache, und damit wird leicht die Ansicht herrschend, die Mathematik sei für den gewöhnlichen Menschenverstand zu schwer und verlange eine besondere Naturanlage. ....

142 p. 8. Wenn schliefslich der nach genetischer Methode unterrichtende Lehrer auch „die Schüler den durchlaufenen Weg nochmals in synthetischer Weise zurücklegen läfst“, so thut er es gewifs nicht, wie Kambly zu glauben scheint, weil er die auf genetischem Wege entwickelten Wahrheiten für

---

[1]) Es ist an anderer Stelle ausgeführt, dafs vom psychologischen Standpunkte gerade das Gegenteil angenommen werden mufs, nicht, dafs das Schwierige des Neuen den Schüler zurückschreckt, sondern dafs das Unbekannte des Neuen sein Interesse weckt und ihn dem neuen Gegenstande eine ganz besondere Liebe entgegenbringen läfst. Sehr richtig dagegen ist es, dafs diese Liebe sehr oft durch die Methode unterdrückt oder gar für immer getötet werde. Von der Gleichgültigkeit zum Widerwillen war aber nur ein Schritt, und dann ist jeder Erfolg unwiderbringlich verloren.

nicht hinreichend erwiesen halte, sondern nur aus pädagogischen Rücksichten, wonach ein Gegenstand der festen Einprägung wegen wiederholt behandelt werden mufs, wenn auch in verschiedener Behandlungsweise.

p. 9. Und ich glaube, das geometrische Zeichnen werde 143
auch dazu beitragen, dafs der Schüler mehr Freude an der Mathematik gewinne und weniger von ihrer scheinbaren Unverständlichkeit abgeschreckt werde.

Prestel, Die geometrische Heuristik. — Emden 1856.

p. 4. Vom Standpunkte der Wissenschaft aus betrachtet, 144
müssen wir die „Elemente" auch der Form nach als ein Meisterstück bezeichnen. Die Sätze sind so geordnet, dafs jeder an der Stelle steht, wo seine Richtigkeit mit Hülfe der voranstehenden vollständig bewiesen werden kann. Es läfst sich sogar nachweisen, dafs in dem Lehrgebäude des Euklid kein Satz fehlt und keiner überflüssig ist.

p. 4. Diese Vorzüge der Elemente des Euklid haben die 145
früher allgemein verbreitete, sich aber auch jetzt noch hin und wieder kund gebende Meinung veranlafst, dafs sie auch das vortrefflichste Lehrbuch seien,[1]) welches dem geometrischen Unterrichte in der Schule zum Grunde gelegt werden könne.

Eben diese Ansicht von der Unübertrefflichkeit der syn- 146
thetischen Methode hat die Entwicklung einer erfolgreichen und lebendigen Lehrweise auf den höheren und niederen Schulen bis auf die neuere Zeit gehemmt, und damit einen über die engeren Kreise der Schule hinausgehenden,[2]) wahrhaft gründ-

---

[1]) Wie stark dieser Irrtum und wie verhängnisvoll in seinen Folgen, findet sich oben ausgeführt.

[2]) Prestel sagt an anderer Stelle: „Ich mufs in Beziehung auf das von mir über den erfolglosen, weil nur formalen Unterricht Gesagte, hier hervorheben, dafs schon Descartes vor 200 Jahren das Ungenügende jener Methode des Unterrichts und der wissenschaftlichen Darstellung aufzeigte und auf den wunden Fleck hinwies. Leider ist dieses aber bis auf die neuere Zeit, weder von den Jüngern der Wissenschaft, noch von der Schule gehörig beachtet und benutzt worden." — Dazu findet sich folgendes Zitat: „Des Cartes sagt in der *Dissertatio de Methodo,* p. 11: „Studueram antea in scholis, inter Philosophiae partes, Logicae

lichen und tüchtigen Bildung im Wege gestanden. Die Ansicht, welche man, selbst in unseren Tagen noch, hin und wieder hört, dafs ganz besondere Anlagen dazu erforderlich seien, um die Mathematik begreifen zu können, ist ein unmittelbares Ergebnis davon gewesen, dafs man glaubte auch die Anfänger nur nach der mit Strenge inne gehaltenen synthetischen Methode in die Geometrie einführen zu können und zu dürfen.

Zerlang, Beitrag z. e. genetischen Entwickl. der Planimetrie. — Sorau 1860.

147 p. 3. .... wohl aber glaube ich die Behauptung aussprechen zu dürfen ...., dafs in didaktischer Beziehung die ausgesprochene Methode, mathematische Lehren zu behandeln, die ihr Vorbild in Euklids Elementen hat, dem Verständnis und der Verbreitung mathematischer Lehren entschieden hinderlich gewesen ist und noch ist.

148 p. 3. Aber darum ist die in ihnen (den Elementen) befolgte Methode, wenn man darunter mehr versteht, als die nie genug zu rühmende und keiner andren Rücksicht zu opfernde

---

et inter Mathematicas disciplinas, Analysi geometricae atque Algebrae; tribus artibus sive scientiis quae nonnihil ad meum institutum facere posse videbantur. Sed illas diligentius examinando, animadverti quantum ad Logicam, syllogismorum formas aliaque fere omnia eius praecepta, non tam prodesse ad ea quae ignoramus investiganda, quam ad ea quae iam scimus aliis exponenda; vel etiam, ut ars Lullii, ad copiose et sine iudicio de iis, quae nescimus garriendum. Et quamvis multa quidem habeat verissima et optima, tam multis tamen aliis, vel supervacuis vel etiam interdum noxiis, adiuncta esse, ut illa dignoscere et separare non minus saepe difficile sit, quam Dianam aliquam aut Minervam ex rudi marmore excitare. Quantum autem ad veterum Analysin atque ad Algebram recentiorum, illas tantum ad speculationes quasdam quae nullius usus esse videbantur se extendere: Ac praeterea Analysin circa figurarum considerationem tam assidue versari, ut dum ingenium acuit et exercet, imaginandi facultatem defatiget et laedat: Algebram vero, ut solet doceri, certis regulis et numerandi formulis ita esse contentam, ut videatur potius ars quaedam confusa, cuius usu ingenium quodammodo turbatur et obscuratur, quam scientia quae excolatur et perspicacius reddatur."

mathematische Strenge, noch nicht die beste Unterrichtsmethode. Denn sie widerspricht sowohl den Forderungen, die an jeden Unterricht, besonders aber an den auf wissenschaftlichen Anstalten erteilten zu stellen sind, dafs nämlich der Schüler weniger Gedachtes, als denken lerne, als auch besonders dem Geiste der Jugend, der ohne Vergleich mehr Verständnis und Sinn für das Werdende, als für das Fertige hat.

p. 4. Ist der Schüler auch von der logischen Richtigkeit 149
eines Satzes überführt, so ist er dadurch von seiner Wahrheit noch nicht überzeugt. Beides steht sehr oft im umgekehrten Verhältnisse.

p. 4. Die Zuneigung, die der Zweck alles wissenschaft- 150
lichen Unterrichts ist und bleiben mufs, kann nur erzeugt werden, wenn dem Schüler das innere Verständnis des Gelernten aufgeschlossen wird. Und hierzu ist eine genetische anschauliche Entwicklung der mathematischen Lehren notwendig. Jeder andere Weg verurteilt den Lernenden zu einer blofsen Rezeptivität, verhindert aber die Produktivität. Blindlings sieht er sich geführt, wo er selber gehen möchte und könnte, wenn ihm nur der Weg gezeigt würde. So wird das Bewufstsein eigener Kraft und des Selbstvertrauens systematisch gelähmt und eine vollständige Ratlosigkeit bei einer selbständigen Leistung ist die unausbleibliche Folge.

Friederich, Einige Bemerkungen über den Unterricht in der Mathematik an Gymnasien. — Ansbach 1852.

p. 4. Der vielfach bemerkte Mangel an Teilnahme an 151
dem mathematischen Unterrichte mag zum Teil in dem eigentümlichen Charakter des Lehrgegenstandes selbst liegen, der mehr als jeder andere ununterbrochene Thätigkeit, Ausdauer und geistige Anstrengung fordert, ohne der Jugend unmittelbar das bieten zu können, was sie so gern sucht und Unterhaltung heifst .... so nennt die Jugend den mathematischen Unterricht trocken und langweilig. Aber in vielen Fällen möchte es denn doch vorzüglich die Art und Weise des Unterrichts sein, welche die Schüler zu solchem Urteile führt.

Wiegand, Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. — Halle 1848.

152 Vorrede. Wenn die grofsartigen Resultate der neueren Geometrie auf den Schulen bis jetzt noch nicht überall den verdienten Eingang haben finden können, so liegt der Grund nach unserem Ermessen nicht allein darin, dafs sich so manche Mathematiker nur schwer vom alten Schlendrian losreifsen können, sondern besonders wohl auch in der Verlegenheit mancher Lehrer, wie sie das Interesse ihrer Schüler für jene Forschungen dadurch wecken sollen, dafs sie ihnen Anleitung geben, selbstthätig neue Resultate in jenen Gebieten aufzufinden.

Schellbach, Über d. Zukunft d. Math. etc. — Berlin 1887.

153 Der hohe wissenschaftliche Wert, den die Vorlesungen über Mathematik an unseren Universitäten immer gehabt haben, würde nicht vermindert, sondern könnte nur gesteigert werden, wenn die Dozenten sich bemühten, die Lücke zwischen Gymnasium und Universität mehr und mehr zu beseitigen.[1])

Klaas, Die Lehre von der Flächenvergleichung. — Duisburg 1881. (Festschrift.)

154 p. 81. Was das Erstere anbetrifft, so folgen in den meisten Lehrbüchern die Sätze so aufeinander, dafs sie nur wenige Anknüpfungspunkte untereinander haben. Man beginnt mit den Sätzen über Inhaltsgleichheit der Parallelogramme und Dreiecke.[2]) Dann kommt der Satz von den Ergänzungs-

---

[1]) Diese Bemerkung ist sehr richtig und es wäre nur zu wünschen, dafs die Universitäten sich mehr dem Standpunkte ihrer Zuhörer anpafsten. Ein Kolleg über Elementarmathematik z. B., das gewissermafsen eine Vermittlung zwischen Schule und Universität böte, wird wohl kaum an irgend einer Universität gelesen. Früher wurde es auch von bedeutenden Gelehrten für nicht zu gering erachtet, eine derartige Vorlesung zu halten.

[2]) Gerade das Kapitel der Flächenvergleichung, nach alter Methode bearbeitet, bietet ein treffendes Beispiel zu dem Mangel an innerem Zusammenhang der Sätze. Auch der Satz von den Ergänzungsparallelogrammen schliefst sich ganz äufserlich an die vorhergehenden Sätze an.

parallelogrammen. Hieran schliefst sich der sehr wichtige Lehrsatz des Pythagoras, welcher mit den früheren Sätzen durchaus nicht in organischen Zusammenhang gebracht ist.

Becker, J. K. Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie. — Zürich 1870.[1])

p. 41. Seit Kant nachgewiesen, dafs die Geometrie ihre Unfehlbarkeit nicht der Strenge ihrer Beweise nach der Euklidschen Methode allein verdanke, sondern hauptsächlich dem Umstande, dafs sie auf die uns unmittelbar gegebene reine Anschauung des Raumes sich stütze, hat man in Deutschland angefangen, die Zweckmäfsigkeit der Euklidschen Methode in Frage zu stellen, während in Frankreich Legendre den Euklid noch in seiner Methode zu übertreffen strebte, und in England noch heute an Euklid wie an der Bibel festgehalten wird. 155

p. 41. Herbart dürfte wohl der erste sein, der in seinem ABC der Anschauung (1803) auf Verbesserung in der Methode des Beweises drang, und namentlich betonte, dafs viele Beweise sich darauf beschränken, die Gewifsheit der Sache festzustellen, aber keine Einsicht in ihre Notwendigkeit gestatten, also nur die Gewifsheit geben, dafs etwas sei, statt zu erklären, warum es so sei. 156

p. 42. Seine (Schweins „System der Geometrie") Haupteinwürfe waren die „Handwerksmäfsigkeit", mit der Euklid die Figuren zum Beweise der Identität auf einanderlegt, statt sich mit der unmittelbar klaren Einsicht zu begnügen, dafs z. B. ein Dreieck durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel völlig bestimmt ist, und dafs die blofse Änderung der Lage der Figur im Raume an ihr selbst nichts ändert. 157

p. 42. Die gewichtigsten Einwendungen gegen Euklid 158

---

[1]) Die Arbeit ist besprochen in Lit. Zentralblatt 1871 Nr. 25. S. 628 und Nr. 31. S. 789. — in Schlömilchs Zeitschrift XV, 5 und in H. Z. III. p. 274—281. — p. 380—389. — p. 465—473. — p. 539—541 und zwar beschäftigt sich von den Rezensionen der Hoffmannschen Zeitschrift die zuletzt angeführte mit demjenigen Abschnitt der Beckerschen Schrift, der sich auf die „Methode der Geometrie" bezieht. — Die Besprechung ist durchaus anerkennend.

von Seiten deutscher Mathematiker sind jedoch die, welche von den Schöpfern und Anhängern der heuristischen und genetischen Methode erhoben werden.

159 p. 43. Obwohl beim Unterrichte selbst viele Lehrer heuristisch verfahren, so ist man in den Lehrbüchern noch heute fast durchgängig dogmatisch geblieben.

160 p. 45. Sehr richtig hat zwar Bernhard Becker als den gröſsten Fehler Euklids den schon von Herbart gerügten hervorgehoben, daſs er sich immer damit begnüge, einen Erkenntnisgrund zu geben, wo man einen Realgrund verlange; d. h. daſs von jeder Thesis nur die Richtigkeit nachgewiesen werde, während der innere Zusammenhang der nachgewiesenen Wahrheiten, aus dem ihre Notwendigkeit hervorgeht, unerörtert bleibt.

161 p. 48. Denn der denkende Mensch will nicht bloſs Gewiſsheit, sondern auch Einsicht in das, was er erkennt, wenigstens soweit solche möglich ist. Und darum sagt Schopenhauer: „Daſs man aber in der Geometrie nur strebt convictio zu bewirken (durch einen Erkenntnisgrund), welche einen unangenehmen Eindruck macht, nicht aber Einsicht in den Grund des Seins, die wie jede Einsicht befriedigt und erfreut: dies möchte nebst anderem ein Grund sein, warum manche sonst vortreffliche Köpfe Abneigung gegen die Mathematik haben.“

162 p. 48. Schopenhauer tadelt nun an der Geometrie Euklids .... zweierlei:

1) Daſs sie ihre Sätze zwar beweise als über allen Zweifel erhabene Wahrheiten, aber keine eigentliche Einsicht gewähre in die Gesetze, als deren Ausdruck sie erscheinen.

2) Daſs sie die einzige mögliche Quelle, aus der diese Einsicht geschöpft werden kann, aufs strengste verschliefse, nämlich die unmittelbare Erkenntnis durch reine Anschauung, und nur da sich auf diese, welche allein wahre Befriedigung giebt, weil sie allein auch wirkliche Einsicht gewährt, berufe, wo eine mittelbare Erkenntnis nicht mehr möglich ist, nämlich bei den sogenannten Axiomen.

Auſserordentlich treffend vergleicht Schopenhauer dieses Verfahren mit dem eines Wanderers, welcher bei Mondenschein

mit grofsen Beschwerden einen steinigen und dornigen Weg mit vielen Windungen zurücklegt, weil er den breiten und guten Fahrweg, dem er bisweilen ganz nahe kommt, für Wasser hält.

p. 52. „Die Anschauung ist nicht nur die Quelle aller 163
Erkenntnis, sondern sie selbst ist die Erkenntnis κατ' ἐξοχήν, ist allein die unbedingt wahre, die echte, die ihres Namens vollkommen würdige Erkenntnis: denn sie allein erteilt eigentliche Einsicht, sie allein wird vom Menschen wirklich assimiliert, geht in sein Wesen über, und kann mit vollem Grunde sein heifsen, während die Begriffe ihm nur ankleben."

p. 52. „Ich habe den obersten Grundsatz des Unterrichts 164
in der Anerkennung der Anschauung, als dem absoluten Fundament aller Erkenntnis festgesetzt und mit Beseitigung aller einzelnen Lehren das Wesen der Lehre und die Urform aufzufinden gesucht, durch welche die Ausbildung unseres Geschlechts durch die Natur selber bestimmt werden mufs."[1])

p. 53. Und in der That ist die Form der Geometrie aus 165
dem Bestreben hervorgegangen, die unzweifelhaften Wahrheiten der Geometrie gegen die Scheinbeweise der Sophisten sicher zu stellen.

p. 56. Wenn ich darum Beweise überall da für voll- 166
ständig überflüssig, ja hemmend halte, wo es sich um Sätze handelt, denen unmittelbare Evidenz zukommt, weil sie die sachgemäfse Entwicklung der geometrischen Wahrheiten fast unmöglich machen,[2]) so hindert dies keineswegs, in allen anderen Fällen die gröfste Strenge zu verlangen, und gerade die Gewohnheit, immer an der Hand der Anschauung zu gehen, und alle Begriffe durch Anschauungen zu belegen, macht es leicht, diese Strenge auch immer zu beobachten.

Falke, Über eine neue Behandlung der Ähnlichkeits- und Kongruenzsätze. — Arnstadt 1875.

[1]) Ein Zitat aus Pestalozzis Werken.
[2]) Man vergl. die Anmerkung zu Zitat Nr. 26.

167 p. 3. Jahrhundertelang war das Werk des Euklid wohl das einzige Lehrbuch der Planimetrie; noch vor wenigen Jahren war es als Leitfaden an gar manchen deutschen Schulen eingeführt, und noch jetzt behauptet es in ganz England eine unbestrittene Alleinherrschaft.

168 p. 5. Dem Euklid war die Reihenfolge ziemlich gleichgiltig; es findet sich zwar von seinem zweiten Buche an auch eine unverkennbare Gruppierung, aber im ersten, welches gerade einen Teil des wichtigsten Stoffes enthält, schwirren die verschiedenartigsten Lehrsätze und Aufgaben bunt durcheinander.

Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung.[1]) — Nordhausen 1852.

169 p. 3. Euklids Methode, die, was die geometrische Strenge betrifft, das Muster für alle Mathematiker bleiben wird, ist keine natürliche Methode, sein System ist ein künstliches. Ihm kam es wie den griechischen Mathematikern überhaupt darauf an, von der Wahrheit der von ihm aufgestellten Sätze zu überzeugen.

170 p. 3. Vor allem wurde diese (die Einseitigkeit der Euklidschen Methode) den Lehrern der Geometrie fühlbar; nur zu oft mufsten sich diese überzeugen, wie schwierig es ist, den Anfängern die Geometrie des Euklid zum Verständnis zu bringen, was in diesem Mafse von der Arithmetik nicht gilt. Bei der Willkürlichkeit der Beweise und der Schwierigkeit den Zusammenhang derselben mit den Lehrsätzen selbst zu erkennen, werden die Schüler meistens wider ihren Willen zur Überzeugung von der Wahrheit eines Satzes gezwungen und die Verwunderung über die Klugheit, mit welcher der Beweis geführt worden, ist der Ausdruck des Mangels jeder Einsicht in die Sache selbst.

171 p. 4. .... gerade dieser allgemein gefühlte Übelstand liefert den Beweis, wie ihrem Gegenstande unangemessen die Methode sein mufs, welche die Anfänge des geometrischen

---

[1]) Vergl. Pietzker, Ein Jünger Schopenhauers in der Geometrie. H. Z. XVI. p. 187—190.

Unterrichts so trocken und so wenig lebensfähig erscheinen läſst.

p. 5. Die Geometrie als Wissenschaft wurzelt wie die 172
Mathematik überhaupt in der Metaphysik, weshalb dieselbe in ihren Anfangsgründen, die nur innerhalb der Metaphysik genau begriffen werden können, sich bei Bestimmung der Grundvorstellungen der gröſsten Strenge zu befleiſsigen hat.[1]) Denn diese Grundvorstellungen, die Art und Weise ihrer Auffassung bestimmen die weitere Entwicklung der Geometrie vollständig, so daſs nach der Verschiedenheit jener die geometrische Methode selbst eine andere wird. Und gerade in dieser Rücksicht findet sich bei Euklid nach fast einstimmigem Urteile älterer und neuerer Mathematiker vieles Mangelhafte.

p. 5. Die Kritik der bisherigen Leistungen in der Geo- 173
metrie auf Grund der kritischen Philosophie hat, was die Grundsätze und Definitionen betrifft, der Professor Schmeiſser in Frankfurt a. O. wohl erledigt.[2]) Derselbe hat nicht nur nachgewiesen, daſs die bis jetzt gebräuchlichen Definitionen von Linie, Winkel etc. unhaltbar sind und daſs überhaupt die

---

[1]) Die Euklidschen Definitionen sind jedenfalls ganz unbrauchbar, selbst da, wo nicht nur Begriffe erklärt werden, die überhaupt ohne Definition a priori klar sind. — Vergl. Kant, Kritik der reinen Vernunft, p. 84 u. 85. (ed. Rosenkranz): „Wir haben oben die Begriffe des Raumes und der Zeit vermittelst einer transzendentalen Deduktion zu ihren Quellen verfolgt und ihre objektive Gültigkeit a priori erklärt und bestimmt. Gleichwohl geht die Geometrie ihren sicheren Schritt durch lauter Erkenntnisse a priori, ohne daſs sie sich, wegen der reinen und gesetzmäſsigen Abkunft ihres Grundbegriffs vom Raume, von der Philosophie einen Beglaubigungsschein erbitten darf. Allein der Gebrauch dieses Begriffs geht in dieser Wissenschaft auch nur auf die äuſsere Sinnenwelt, von welcher der Raum die reine Form ihrer Anschauung ist, in welcher also alle geometrische Erkenntnis unmittelbare Evidenz hat und die Gegenstände durch die Erkenntnis selbst a priori in der Anschauung gegeben werden."

[2]) Die Arbeit Schmeiſsers, eine Programmabhandlung aus dem Jahre 1851, ist mir bis dahin leider noch nicht zu Gesicht gekommen. Im übrigen stimmt die Ansicht, daſs die älteren griechischen Mathematiker in Bezug auf die geometrischen Grundvorstellungen richtigere Ansichten gehabt haben, als die späteren mit der verbreiteten Ansicht überein, daſs die Elemente Euklids schon die Spuren des Niederganges der griechischen Kultur zeigen. — Vergl. Zitat Nr. 115.

Versuche zu Definitionen derselben aufgegeben werden müssen, sondern auch gezeigt, wie schon ältere griechische Mathematiker in Bezug auf die geometrischen Grundvorstellungen richtigere Ansichten gehabt haben als die späteren.

174 p. 5. Das von Dr. L. C. Schulz v. Strafsnitzki verfafste Werk scheint die Geometrie auf das Gebiet, dem sie ihrer Natur nach angehört, nämlich auf das der Anschauung, verweisen zu wollen. Denn darum dreht sich schliefslich Alles.

175 p. 5. Giebt die Geometrie, meint Schopenhauer, im Wesentlichen eine Einsicht in den Nexus der Lage der Teile des Raumes und ist diese Einsicht nur durch die Anschauung möglich, so mufs jeder geometrische Satz auf diese zurückgeführt werden, und der Beweis bestände hiernach blos darin, dafs man den Nexus, auf dessen Anschauung es ankommt, deutlich hervorhöbe.

176 p. 7. Freilich ist hierbei eins zu vermeiden, dies, was verschiedene Mathematiker den Snellschen Schriften zum Vorwurf gemacht haben, „der blofsen Anschauung zu viel zuzuweisen." Dies kann nur dann geschehen und nur in der Hinsicht hat auch der gemachte Vorwurf Sinn, wenn die unmittelbare Anschauung statt der begrifflichen Vermittlung in Anspruch genommen oder, was dasselbe ist, wenn das Gebiet der Grundanschauungen und der unmittelbar klaren Erkenntnisse d. h. der sogenannten geometrischen Grundsätze zu weit ausgedehnt wird. — So viel ist indessen klar, dafs die geometrischen Grundsätze nur unmittelbare Grundanschauungen sein können, dafs also kein Satz als solcher aufgeführt werden kann,[1]) der entweder als logische Folge

[1]) Vergl. Kant, Kritik der reinen Vernunft, p. 245: „Man macht einen Unterschied zwischen dem, was unmittelbar erkannt, und dem, was nur geschlossen wird. Dafs in einer Figur, die durch drei gerade Linien begrenzt ist, drei Winkel sind, wird unmittelbar erkannt, dafs diese Winkel aber 2 R. gleich sind, ist nur geschlossen." p. 519: „Man kann sich eines Begriffs a priori mit keiner Sicherheit bedienen, ohne seine transzendentale Deduktion zu Stande gebracht zu haben." — p. 561: „Denn da sie (die Mathematiker) kaum jemals über ihre Mathematik philosophiert haben (ein schweres Geschäft), so kommt ihnen der spezifische Unterschied des einen Vernunftgebrauchs von dem andern gar

einer Grundanschauung zu betrachten ist oder dessen Erkenntnis etc. eine Vergleichung von Gröfsenverhältnissen, also eine wenn auch noch so einfache Messung voraussetzt.

p. 9. Betrachtet man hierauf die Figuren im allgemeinen, 177
so ist der einzuschlagende Weg im Vorhergehenden schon begründet und das Erste, was hier zur Einsicht in die Sache erfordert wird, ist ein Nachweis der Art und Weise, wie die Figuren im allgemeinen und in besonderen Fällen im Anschauenden entstehen. Denn was sind alle Gestalten der Geometrie überhaupt anders als Produkte unserer geistigen Thätigkeit! ...., sondern gerade das Objekt selbst wird durch das Anschauungsvermögen hervorgebracht.

C. Rethwisch, Jahresberichte über das höhere Schulwesen. II. 1887. — Berlin 1888.

Mathematik: A. Thaer. — Abteilung B.

p. 182. So allgemein die Notwendigkeit dieses Unter- 178
richtes anerkannt wird und so freudig die offizielle Einführung desselben begrüfst wurde, so sehr weichen die Ansichten,[1]) wie derselbe zu gestalten ist, noch von einander ab. .... Was fest steht, ist erfreulich genug: Jeder propädeutische Unterricht, wo und wie er noch bisher erteilt worden ist, hat gute Früchte getragen.

p. 183. Etwas viel, meint Erler, bietet er überhaupt, und 179

---

nicht in Sinn und Gedanken. Gangbare und empirisch gebrauchte Regeln, die sie von der gemeinen Vernunft borgen, gelten ihnen dann statt Axiome. Wo ihnen die Begriffe von Raum und Zeit, womit sie sich (als der einzigen ursprünglichen Quantität) beschäftigen, herkommen mögen, daran ist ihnen gar nichts gelegen, und ebenso scheint es ihnen unnütz zu sein, den Ursprung reiner Verstandesbegriffe und hiermit auch den Umfang ihrer Gültigkeit zu erforschen. In allem diesen thun sie ganz recht, wenn sie nur ihre angewiesene Grenze, nämlich die Natur, nicht überschreiten."

[1]) An dieser Stelle werden Diekmanns Übungen und Aufgaben ausführlich besprochen und viele lobende Rezensionen erwähnt. Es heifst u. a.: „Auch die übrigen Anerkennungen sind ihm entschieden mehr wegen seiner Abweichungen von Euklid als wegen seiner Zuneigung zu demselben zu teil geworden."

Diekmann giebt das zu,[1]) indem er für die Durchnahme des Stoffes noch ein Tertial der Quarta beansprucht.

180 p. 186. Ein Bedenken möchte aber der Berichterstatter hier erwähnen mit dem Wunsch, widerlegt zu werden: die Schüler folgen mit Interesse, ja Leidenschaft einem Lehrgang nach Hub. Müller, aber sie vergessen rasch und vollständig, wenn man nicht in Euklidischer, d. h. mehr oder weniger willkürlicher Verknüpfung die Sätze wiederholt.

181 p. 203. Die Forderung, Geometrie der Lage zu treiben, findet sich bei Behrle, Kutsch und Schiller. Besonders bemerkenswert ist aber das Eintreten Bertrams auf der Naturforscherversammlung zu Berlin für die synthetische Geometrie. „Die Schwierigkeiten, welche die synthetische Geometrie bietet, findet er hauptsächlich in der Bezeichnungsart.“ Für die synthetische Geometrie trat auch Flohr ein, während Scholz in einem längeren Vortrag die Streichung derselben zu Gunsten der darstellenden Geometrie verlangte.

E. Dühring u. U. Dühring, Neue Grundmittel etc. Leipzig 1884.

182 p. 405. Er (Pascal) meinte nämlich, das Ideal des Wissens bestehe darin, Alles zu beweisen, und es sei nur eine Folge der menschlichen Schwäche, dafs die Axiome unbewiesen blieben. Wer sich in dieser Weise auslassen kann, hat keine Ahnung von der Natur wahren Wissens. Wahrlich, erträglicher wäre der umgekehrte Fehler,[2]) nämlich zu behaupten die Notwendigkeit der Beweise entspräche einer Unvollkommen-

---

[1]) Da wir für die Ausdehnung des Unterrichts noch über die ganze Quarta sind, so geht für uns selbstverständlich Diekmann nicht zu weit.

[2]) Diese feine philosophische Bemerkung Dührings über die Notwendigkeit der Beweise kennzeichnet in der That das Wesen der Axiome aufs treffendste. Sie kann zugleich dazu dienen, unsere Ausführungen über die Ausdehnung der Axiome zu unterstützen. Es steht diese Ansicht allerdings im schroffsten Gegensatze zu den Bestrebungen, die Mathematik auf möglichst wenig Axiome zu begründen. Man könnte vielleicht in diesem Sinne von einer besonderen Veranlagung für Geometrie sprechen; je mehr unmittelbar gewifs oder je gröfser die Anzahl der Axiome, desto gröfser die Beanlagung.

heit der menschlichen Einsichtsart; denn das Vollkommenere bestände darin, nicht blos die Axiome, sondern alles unmittelbar, also ohne Beweisbedürftigkeit, zu wissen.

p. 409. Man hat über das Erfordernis der Anschaulich- 183
keit für den Unterricht die unrichtigsten Lehren verbreitet; man hat leichte Faſslichkeit mit räumlicher Anschaulichkeit verwechselt, während doch nur in den allereinfachsten Fällen das Anschauliche auch zugleich das leicht Faſsliche sein kann. Allerdings bedarf man auch der räumlichen Anschauung als eines unentbehrlichen Ausgangspunktes; aber es folgt hieraus nicht, daſs alles räumlich anschaulich werden müsse. Im Gegenteil ist es ein Vorzug, daſs sich der Verstand von der Grundlage der bloſsen Anschauung bald erheben und dann auf eigenen Füſsen bewegen kann. Elemente der Geometrie sollten daher künftig äuſserst konzentriert ausfallen und immer nur unter Zuhülfenahme von Elementen der allgemeinen Gröſsenanalysis, also in Anknüpfung an gewisse arithmetische, algebraische und analytische Voraussetzungen entworfen werden. Dies steht keineswegs der Wahrheit im Wege, daſs, wie der Weg der Geschichte selbst gezeigt hat, einige geometrische, ganz einfach anschauliche Grundlehren von einer ausgebildeten Arithmetik unabhängig sind und das Wenige an arithmetischen Einsichten, dessen sie bedürfen, unmittelbar in der geometrischen Darstellung gleichsam mit sich führen können.[1]) In derartigen letzten Einfachheiten ist der Ursprung der Erkenntnis ein gemeinsamer und findet sich die räumliche Anschauung mit einem unmittelbaren und anschaulichen Rechnen verbunden, welches an und mit dieser Anschauung ohne bemerkbare Unterscheidung vollzogen wird. Die Sonderung wird erst sichtbar, wenn verwickeltere Verhältnisse in Frage kommen; dann muſs sie aber auch zu einer prinzipiellen Trennung der beiderlei Elemente führen.

p. 410. In der That ist es eine Rückständigkeit, gleich 184
den Griechen in ihrem klassischen Stadium, fast ausschlieſs-

---

[1]) Es wird also nichts im Wege stehen, zuerst nur Geometrie zu lehren und von Arithmetik nur das unmittelbar Notwendige ohne besondere Lehre in den Kursus der Geometrie einzuflechten.

lich im Anschaulichen zu verbleiben und so die Geometrie zur mafsgebenden Grundlage aller übrigen Mathematik zu machen.[1]) — .... Trotzdem kann das griechische Beispiel für den allerersten Unterricht in der eigentlichen Mathematik insofern etwas lehren, als es .... nützlich sein wird, mit sehr konzentrierten Elementen der Geometrie den Anfang zu machen. Man wird auf diese Weise wenigstens eine Gewöhnung der Phantasie an die Hervorbringung gesetzmäfsiger räumlicher Gebilde erzielen und dem unentwickelten Sinne des Anfängers gerade in derjenigen Richtung entgegenkommen, in welcher die Stammesanlagen der modernen Völker von Natur am wenigsten leisten. Es ist nicht blos die Phantasie nach Art der Griechen, sondern überhaupt jegliches auf Gestaltungskraft angelegte Vorstellungsvermögen, dem man mit der ersten Einführung in gute geometrische Elemente ein wenig zur Ausbildung verhelfen kann. Es ist sozusagen das Kinderstadium der Geistesregungen, welches ein Anrecht darauf hat, nach dem Vorbilde der weltgeschichtlichen Entwicklung der Mathematik zuerst an den ihm wahlverwandten Elementen der Geometrie gefördert zu werden. Die allgemeine Gröfsen-

---

[1]) Diese Bemerkungen Dührings treffen offenbar nicht den Unterricht an den höheren Lehranstalten, sondern beziehen sich auf das Studium an den Universitäten. Auf der Schule mufs entschieden die Geometrie den Mittelpunkt des mathematischen Unterrichts bilden und den überwiegenden Teil der zu Gebote stehenden Zeit einnehmen. Es geht dies auch aus den folgenden Ausführungen D's. hervor. Ich benutze übrigens gern diese Gelegenheit, um meinen Standpunkt noch einmal kurz zu präzisieren und etwaigen Mifsdeutungen vorzubeugen: Der mathematische Unterricht mufs, wenn er mit Erfolg erteilt werden soll, an Bekanntes anknüpfen, und das sind die Raumanschauungen, die nur zum Bewufstsein gebracht werden müssen. Deshalb mufs der mathematische Unterricht mit der Geometrie beginnen und in ihr auch während der ganzen Schulzeit seinen hervorragenden Stützpunkt finden. Dazu kommt, dafs die Geometrie auch schon auf der Schule zu einem gewissen Abschlufs gebracht werden kann. Der Wert der Arithmetik wird selbstverständlich dadurch gar nicht getroffen.

„Ὁ θεὸς ἀριθμητίζει! lautet ein verbürgter Ausspruch von Gauss. Die Mathematik ist nach seiner Überzeugung die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik die Königin der Mathematik."

Schwering, Aufgaben und Anschauung. Coesfeld, 1889.

analysis ist eine Abstraktion von der Gattungsbestimmtheit der verschiedenen wirklich vorhandenen Gröfsen, und diejenige Art von wirklichen Gröfsen, an welche zuerst anzuknüpfen ist, findet sich eben im Gebiet räumlicher Gebilde.

p. 419. Diese geometrischen Zurüstungen auf ein ge- 185
ringstes Mafs zuzückzuführen, diesem notwendigen Mafs aber dann auch sein volles Recht widerfahren und hier die Anschaulichkeit gehörig walten zu lassen, ist Angesichts des modernen Zustandes der Mathematik ein Erfordernis strenger Wissenschaftlichkeit.

Schwering,[1]) Aufgabe und Anschauung. Coesfeld 1889. Progr.

p. 4. Eins der thörichtsten und darum gerade dem grofsen 186
Haufen der Halbgebildeten am meisten mund- und ohrgerechten Vorurteile ist jenes, es sei für die Hervorbringung genügender Leistungen in der Mathematik eine besondere Veranlagung erforderlich. Die Zerstörung dieses lächerlichen Aberglaubens ist vor allem der Schule zu danken.[2]) In wahrem Siegesfluge hat die Überzeugung von der Notwendigkeit des Anschauungsunterrichts und von der Unentbehrlichkeit des Aufgabenlösens in den beteiligten Kreisen Platz gegriffen.

p. 5. Man braucht nur die beiden Grundsätze: „Der 187
Unterricht mufs anschaulich sein“ und „Die Aufgabe ist Ziel und Zweck der mathematischen Ausbildung“ auf das bestimmte Gebiet der Stereometrie anzuwenden.[3])

p. 5. Man hat in neuerer Zeit in einseitigem Doktrinaris- 188
mus die alte Einteilung der Geometrie in Planimetrie und

---

[1]) Besprochen von Cantor in der Zeitschrift für Mathematik und Physik. 35. Jahrg. 1. Heft. p. 35.

[2]) Die Schule hat nach meiner Ansicht damit nur ihre Pflicht und Schuldigkeit gethan, denn von wem anders gingen die Ursachen aus zu der früheren Annahme einer besonderen Begabung, als von der Schule, die durch ihre Methode dieses Vorurteil hervorrief und befestigte.

[3]) Dieses sind in der That die beiden Grundsätze alles geometrischen Unterrichtes: der letztere, der im arithmetischen Unterricht schon immer Geltung gehabt hat, wird hoffentlich durch die Bestrebungen der neueren Zeit auch im geometrischen allgemein anerkannt.

Stereometrie bemängeln wollen. Gewifs bildet die Planimetrie nur einen Teil der Stereometrie;[1]) aber dieser Teil ist, wie mit Recht bemerkt worden ist, so umfangreich, dafs durch ihn die stereometrischen Betrachtungen nicht auseinander gerissen werden dürfen.

189 p. 11. Dahin gehört ferner eine gewisse Abneigung gegen den indirekten Beweis, den man mit Berufung auf ein Witzwort Schopenhauers als „Mausefallenbeweis“ zu brandmarken bestrebt ist.[2]) Gewifs, Schopenhauer war ein geistreicher Schriftsteller und hat es in seiner Philosophie fertig gebracht, mit mehr Geschick als mancher andere die wirkliche Welt auf den Kopf zu stellen. Daraus folgt aber noch keineswegs, dafs er verdient, in Fragen der mathematischen Didaktik als Kenner gehört zu werden.

190 p. 11. Die von uns entwickelten Ansichten stechen durch ihre Nüchternheit und durch das Festhalten an altbewährten Grundsätzen sehr prosaisch ab gegen manche kühne Gedanken der Neuerer. Soll aber der gegenwärtige, unserer Meinung nach im ganzen sehr günstige Stand des mathematischen Unterrichts erhalten bleiben,[3]) soll die Mathematik als praktische Schule des Denkens, als Schlüsselbewahrerin zum Zauberreiche der Naturwissenschaften sich die Beachtung und Pflege unserer gebildeten Volksklassen erhalten, dann hat die Schule

---

[1]) So sehr auch vom wissenschaftlichen Standpunkt eine einheitliche Behandlung von Planimetrie und Stereometrie gerechtfertigt erscheint, so wenig ist dieses Prinzip in der Schule angebracht. Übrigens ist auch in der höheren Geometrie z. B. der analytischen eine getrennte Behandlung der ebenen und räumlichen Geometrie allgemein üblich.

[2]) Ich habe den Eindruck gewonnen, als wenn der Schopenhauersche Ausdruck nicht allein auf den indirekten Beweis gemünzt sei, sondern in erster Linie der dogmatischen Behandlung des Beweises überhaupt gelte. Schopenhauer hat auch wohl nicht als mathematischer Didaktiker auftreten wollen, sondern nur aus der Mathematik prägnante Beispiele für seine philosophischen Erörterungen entnommen.

[3]) Sollte der „im ganzen sehr günstige Stand des mathematischen Unterrichts“ nicht aus einer zu optimistischen Beurteilung herrühren? Die überwiegende Verbreitung alter, viel bekämpfter Lehrbücher, sowie die Schwierigkeiten, die der Einführung von Büchern, wie des von Hubert Müller z. B., erwachsen, geben in dieser Hinsicht doch zu denken.

sich vor dem unbesonnenen Drängen der Neuerer ebenso vorsichtig zu hüten, wie vor dem Zurücksinken in die platte Auswendiglernerei früherer Zeiten.

Pauly, Der erste Jahreskursus des plan. Unterrichts. Progr. Andernach 1889.

p. 4. Das bekannte Verfahren des Aufeinanderlegens und 191
die Art und Weise, wie die in der Hypothesis angeführten Stücke der Reihe nach zur gegenseitigen Deckung gelangen...,[1]) dies alles, was ja erst nachher im Beweise zur ausführlichen Darstellung gelangen soll, ist oft im Verstande des Schülers ein einziger Schlufs, der sich aus der klaren räumlichen Vorstellung der in der Hypothesis angegebenen Bedingungen fast unmittelbar vollzieht.

p. 11. Ich wende mich nun gegen die Unsitte, dem Lehr- 192
buche der Planimetrie eine Art von philosophischer Grundlage zu geben. Bekanntlich erfährt der Quartaner schon gleich in den ersten Lehrstunden,[2]) dafs das Ganze gröfser ist als ein Teil desselben..... Wird es mir zugestanden, dafs solche Prinzipien philosophischer Natur sind, ... so folgt schon daraus, dafs sie als einer anderen Wissenschaft angehörig aus dem Lehrbuche der Planimetrie entfernt werden müssen. Hält

---

[1]) Es scheint, als wenn immer mehr die Ansicht an Verbreitung gewinnt, die die Kongruenzsätze verbannt wissen will und an deren Stelle vier Grundaufgaben setzt mit Lösungen, deren Eindeutigkeit a priori erkannt wird. Die vorliegende Abhandlung leidet übrigens, wie mir scheint, an einer gewissen Einseitigkeit: die Vorarbeiten sind zu wenig berücksichtigt.

[2]) Ich sehe nicht recht ein, gegen was Pauly hier vorgeht. Die Erörterung der Grundbegriffe kann doch nicht vollständig ausgemerzt werden. An welcher Stelle sollen aber dann diese Betrachtungen eingeflochten werden? Dabei ist zu bedenken, dafs die Lehrbücher der Planimetrie meistens so eingerichtet sind, dafs sie für alle Klassen gebraucht werden. Übrigens steht es ja jedem Lehrer frei, von diesen philosopischen Erörterungen so viel oder so wenig zu geben, als er für angemessen hält. Es giebt doch Gebiete, wo Philosophie und Mathematik nicht zu trennen sind; sollen diese deshalb aus der Mathematik entfernt werden, so würde man sie mit demselben Rechte aus der Philosophie weisen; aber wohin dann damit?

man mir aber das mathematische Gewand entgegen, in welches einige dieser Axiome eingekleidet sind, ... so sehe ich noch keinen Grund, warum gerade das Lehrbuch der Planimetrie diese Beigabe bekommen soll, während das Lehrbuch der Algebra, welche Wissenschaft sich ebenso häufig auf die genannten Grundsätze stützt, derselben nicht zu bedürfen scheint.

193 p. 11. Auch bin ich keinen Augenblick im Zweifel, dafs die oben berührten in ein mehr mathematisches Gewand eingekleideten Axiome aus dem Lehrbuche des Quartaners, sowie auch aus dem Schulunterricht überhaupt zu entfernen sind.[1]) Zunächst ist es nicht nötig, dem Knaben Axiome noch besonders mitzuteilen, denn sie bilden einen angeborenen Teil seiner Erkenntnis, von welchem er unbewufste Anwendung macht und bereits gemacht hat, seitdem er denken lernte. Es ist eigentlich eine wunderliche Sache, dafs ein Schüler die Grundsätze, die ihm eingeboren sind, an einer höheren Lehranstalt auch noch nachträglich auswendig lernt. .... Sprachliche Formen für diese Axiome darf er nicht kennen lernen, die Anwendung derselben darf nur eine unbewufste sein.

194 p. 13. Nach dieser Erörterung über die Methode des Vortrags planimetrischer Sätze kehren wir wieder zur Einleitung der Lehrbücher zurück und richten unsere Aufmerksamkeit auf das,[2]) was uns aufser den besprochenen philosophischen Prinzipien noch sonst bemerkenswert erscheint. Zunächst fällt uns die grofse Menge von Definitionen auf. Man definiert z. B. fol-

[1]) Diese Forderung ist doch ganz unberechtigt. Niemand wird bezweifeln, dafs diese Grundsätze eine Erkenntnis a priori, eine angeborene Erkenntnis sind — sonst wären es eben keine Grundsätze —, aber diese Grundsätze, die unbewufst im Verstande des Schülers vorhanden sind, müssen geweckt, müssen zum Bewufstsein gebracht werden. Von einem Auswendiglernen darf dabei natürlich nicht die Rede sein. Der mathematische Unterricht soll ja gerade das folgerichtige Denken zu einer Sache des Bewufstseins machen.

[2]) Was ich schon oben gesagt, kann ich hier wiederholen. Wir haben in der Hauptsache Lehrbücher der Planimetrie, die nicht in Kurse für die einzelnen Klassen geteilt sind. Aufserdem ist klar, dafs eine Reihe von Begriffen erklärt werden mufs; es ist gewissermafsen das Handwerkszeug zur Arbeit.

gende Begriffe: Grundsatz (Axiome), Lehrsatz (Theoreme), Erklärung oder Definition etc. etc. Ich bin überzeugt, dafs die Lehrer der Mathematik über solche Dinge einfach hinweggehen, wenigstens im ersten Unterrichte; dann ist es aber mindestens überflüssig, dieselben in den für den Quartaner bestimmten Leitfaden aufzunehmen. Einige Lehrbücher suchen dem Schüler schon in der Einleitung das Objekt der mathematischen Wissenschaften und die Einteilung derselben klar zu machen.[1])

p. 14. Nach meiner Ansicht ist es vollständig ausrei- 195
chend, mindestens für das erste Lehrjahr, wenn die Schüler, statt etwa die Definition für Nebenwinkel hersagen zu können,[2]) stets auf Geheifs des Lehrers ein Paar Nebenwinkel an die Tafel zeichnen .... können. .... — Eine solche gemilderte Praxis ist ferner für das ganze Gebiet des ersten Jahreskursus überhaupt zu befolgen.

p. 15. Zunächst halte ich es für wünschenswert, dafs die 196
sogenannten propädeutischen Übungen, deren Wert in den letzten Jahren eine erfreuliche Anerkennung gefunden hat, nicht nur vor dem planimetrischen Unterrichte, sondern auch während desselben eine geeignete Berücksichtigung finden, und zwar in der Art, dafs man gewissen Lehrsätzen bestimmte, für den speziellen Satz berechnete Übungen unmittelbar vorangehen läfst.

p. 16. Der andere Vorschlag, den ich dem Lehrer der 197
Mathematik noch zur Beurteilung anheim stellen möchte, geht dahin, beim ersten planimetrischen Unterrichte, wo nur immer möglich, auf Verhältnisse des Lebens und der Natur, oder auf die technische Verwendung der Mathematik Bezug zu nehmen. .... Auf diese Weise gründet man den blofs theo-

---

[1]) Wer wollte leugnen, dafs man hier zu weit gehen kann? Aber im Ernst kann doch nicht verlangt werden, das Objekt des geometrischen Unterrichts nicht gleich anfangs festzustellen.

[2]) Hier stimme ich im wesentlichen mit Pauly überein. Aber ich glaube, dafs, wenn ein Schüler Nebenwinkel z. B. zeichnen kann, er auch leicht dahin gebracht werden kann, das Charakteristische derselben mit Worten anzugeben. Der Unterricht dürfte sonst wohl auch leicht nicht seinen vollen Zweck erreichen.

retischen Vortrag der Aufgabe auf die feste Grundlage eines praktischen Nutzens, und ein Versuch wird zeigen, wie dies allein schon im stande ist, freudige Wissbegierde hervorzurufen.

H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. — Progr. Charlottenburg 1889.

198 p. 1. Ungleichmäfsiger Fleifs und zeitweiser Mangel an Aufmerksamkeit rächt sich in keinem Unterrichtsgegenstande gleich stark wie in der Mathematik,[1]) weil in anderen Wissenszweigen bei unvollständiger Kenntnis des Vorhergehenden wohl noch vieles verstanden werden kann, während in der Mathematik das Folgende dunkel bleiben mufs, wenn das Vorausgegangene nicht klar erfafst ist.

199 p. 2. Das Lehrverfahren mufs danach eingerichtet werden, dafs schon in den ersten Anfängen mit dem Gewinn an Wissen auch die Fähigkeit erreicht wird, das gewonnene Wissen anzuwenden, damit das natürliche Interesse an dem neuen Lehrstoff nicht nachläfst, sondern durch die Freude am Können gesteigert wird.

200 p. 2. .... es wird zu wenig Rücksicht darauf genommen, dafs der Schüler beim Unterricht praktisch mitarbeiten, dafs er an der Entwicklung des Lehrstoffs regen Anteil nehmen und zum Aufbau des Systems die Bausteine selber aufsuchen mufs;[2]) es wird ferner auf die Ausbildung der Anschauungsthätigkeit nicht das nötige Gewicht gelegt. Dadurch, dafs Sätze und Beweise in fertiger Form gegeben sind, wird der natürliche Hang des Schülers, lediglich mit dem Gedächtnis zu arbeiten, in der bedenklichsten Weise unterstützt. ....

201 p. 2. In erster Linie mufs die Anschauungsthätigkeit

---

[1]) Dies ist ein Hauptpunkt, der gar nicht dringend genug betont und in den Vordergrund gestellt werden kann.

[2]) Dafs diese Schäden schon lange erkannt sind, geht aus den Bestrebungen der mathematischen Lehrer genügend hervor. Die heuristische Methode und in Verbindung mit ihr die genetische sind ja aus der Bekämpfung der berührten Schäden, einer Folge der dogmatischen Behandlung, hervorgegangen.

aufs sorgfältigste gepflegt werden, damit der Schüler es lernt, die Beziehungen zu sehen, von denen gesprochen wird.

p. 3. Von herrorragender Wichtigkeit ist naturgemäfs 202
der erste planimetrische Unterricht, der den Schüler mit einer verhältnismäfsig grofsen Anzahl neuer Begriffe bekannt machen und den jugendlichen Geist an die ihm fremde Methode der Entwicklung mit ihrer strengen Folgerichtigkeit gewöhnen soll. . . . .

p. 3. In der letzten Zeit hat nun der Streit der Mei- 203
nungen, ob die Schulgeometrie noch Euklidisch betrieben wird oder nicht, ob die Grundlagen des Euklidischen Systems mit den heutigen Anforderungen noch vereinbar sind, oder ob auf neuen Fundamenten die Aufstellung eines neuen, in sich selbst harmonischen Baues erstrebt werden soll, das Interesse der Fachgenossen in ganz besonderem Mafse in Ausspruch genommen. . . . .

Brunn, Ein Beitrag zur Behandlung planimetrischer Konstruktionsaufgaben im Anfangsunterricht. — Progr. Husum 1888.

p. 1. Gegenwärtig ist fast allgemein die Ansicht ver- 204
lassen, die den planimetrischen Konstruktionsaufgaben kaum einen Platz im Unterrichte gönnen wollte, weil der Mangel allgemeiner Methoden die Lösung solcher Aufgaben zu einer Art von Rätselraten mache und eine gewisse Findigkeit der Schüler voraussetze.

Bohle, Der vorbereitende geometrische Unterricht in Quinta. — Progr. Crefeld 1889.

p. 3. Die Forderung, alles Wissen auf Anschauung zu 205
begründen, ist seit Pestalozzi die Grundlage der Pädagogik geworden.

p. 4. Die Geometrie arbeitet sofort mit sehr abstrakten 206
und scharf bestimmten Begriffen, ehe der jugendliche Geist dieselben anschaulich geläufig hat.[1] . . . . Was der Schüler

[1]) Mit bestimmten Begriffen ja, aber mit sehr abstrakten nur in gewisser Beziehung. Was der Schüler für den Geometrieunterricht mitbringt, darf nicht unterschätzt werden und erhebt sich zu seiner vollen

selbst für den Geometrie-Unterricht mitbringt, ist von geringer Bedeutung.

207 p. 4. Durch diese fortwährende Beschäftigung mit geeigneten Zeichnungen wird der Vorbereitungskursus auf die Ausbildung des Anschauungsvermögens, also der Fähigkeit des Geistes sich schnell und leicht in die verschiedensten Lagenbeziehungen geometrischer Figuren hinein zu finden, fördernd wirken. Wie wichtig diese Fähigkeit ist und wie vielen schwächeren Schülern sie fehlt, kann man auf jeder Stufe des mathematischen Unterrichts beobachten.

208 p. 5. Dem Anfänger erscheint es höchst überflüssig, für dasjenige, was ihm anschaulich durchaus klar ist, einen Beweis zu geben .... Er sieht mit einer gewissen Überzeugung durch unmittelbare Anschauung ein und dies genügt ihm.

209 p. 6. In Bezug auf das erstgenannte Ziel, nämlich die Einführung des Schülers in das Gebiet der geometrischen Gebilde und Begriffe, ist es einleuchtend, daſs methodisch durchaus anders verfahren werden muſs als beim wissenschaftlichen Unterricht.

Alphabetisches Verzeichnis der Werke, aus denen ausführlich zitiert ist:

Zitate:

1) Bauernfeind: Über den Einfluſs der exakten Wissenschaften etc. — Progr. München, 1869 . . . . 134—138
2) Becker, J. K.: Abhandlungen aus dem Grenzgebiet etc. — Zürich, 1870. . . . . 155—166
3) Becker, J. K.: Zur Reform des geometr. Unterrichts. — Progr. Wertheim a/M., 1880 . . . . 118—124
4) Beneke: Erziehungs- und Unterrichtslehre. — Berlin, 1876 82—86
5) Bielmayr, Über den Mathematikunterricht etc. — Progr. Achaffenburg, 1870 . . . . 128—133
6) Bischoff: Über Zweck und Art des math. Unterrichts etc. — Progr. Amberg, 1847 . . . . 125—127
7) Bohle: Der vorbereitende geometrische Unterricht. — Progr. Crefeld, 1889 . . . . 205—209

Bedeutung, wenn dem eigentlichen wissenschaftlichen Unterricht ein propädeutischer Kursus vorausgeht.

Zitate:

8) Brunn: Ein Beitrag zur Behandlung etc. — Progr. Husum, 1888 204
9) Dahl: Lehrplan für den math. Unterricht etc. — Progr. Braunschweig, 1887 . . . . 40 u. 41
10) Deinhardt: Der Gymnasialunterricht. — Hamburg, 1837 101—104
11) Dühring: Neue Grundmittel und Erfindungen etc. — Leipzig, 1884 . . . . 182—185
12) Ernst: Die Methoden der Planimetrie etc. — Progr. Kassel, 1860 . . . . 71—74
13) Falke: Über eine neue Behandlung etc. — Progr. Arnstadt, 1875 . . . . 167 u. 168
14) v. Fischer-Benzon: Die geometrische Konstruktionsaufgabe. — Progr. Kiel, 1884 . . . . 42—50
15) Friederich: Einige Bemerk. über den Unterricht i. d. Math. — Progr. Ansbach, 1852 151
16) Hankel: Die Entwicklung der Math. etc. — Tübingen, 1885 105 u. 106
17) Heinze: Der Vorbereitungsunterricht etc. — Progr. Königsberg, 1888 . . . . 51—54
18) Herbart: Pädagogische Schriften. — Leipzig, 1873 . . . . {66, 88—98}
19) Jenrich: Beiträge zur Methodik etc. — Progr. Magdeburg, 1882 . . . . 3—15
20) Kaiser: Über einige Hauptpunkte des geometr. Unterr. — Progr. Remscheid, 1881 . . . . 55—63
21) Kern: Grundrifs der Pädagogik. — Berlin, 1881 87
22) Klaas: Die Lehre von der Flächenvergleichung etc. — Progr. Duisburg, 1881 154
23) Korneck: Genetische Behandlung des planimetr. Pensums etc. — Progr. Kempen, 1879 . . . . 139—143
24) Kosack: Beiträge zu einer systematischen Entwicklung etc. — Progr. Nordhausen, 1852 . . . . 169—177
25) Lichtenberg: Aus der Praxis des math. Unterrichts. — Progr. Oldesloe, 1887 . . . . 27—32
26) Mager: Wissenschaft der Mathematik etc. — Berlin, 1837 114—117
27) Müller, H.: Über den ersten planimetr. Unterricht. — Progr. Berlin (Charlottenburg), 1889 . . . . 198—203
28) Müller, Hubert: Besitzt die heutige Schulgeometrie etc. — Metz, 1889 . . . . 67—70
29) Österreichischer Organisationsentwurf 65
30) Pascals Regeln 64
31) Pauly: Der erste Jahreskursus des plan. Unterr. — Progr. Andernach, 1889 . . . . 191—197
32) Prestel: Die geometrische Heuristik. — Progr. Emden, 1856 144—146
33) Reidt: Anleitung zum math. Unterricht. — Berlin, 1886 . 107—113
34) Rethwisch: Jahresberichte über höheres Schulwesen. — Berlin . . . . 178—181

Zitate:

35) Schiller: Handbuch der prakt. Pädagogik. — Leipzig, 1886 99 u. 100
36) Schellbach: Über die Zukunft der Mathematik. — Berlin, 1887 153
37) Schrader: Erziehungs- und Unterrichtslehre. — Berlin, 1876 75—77
38) Schütz: Die gegenwärtige Bedeutung etc. — Progr. Frankfurt a/M., 1887 . . . . 33—39
39) Schulze: Bemerkungen zum Geometrie-Pensum etc. — Progr. Strausberg, 1887 2
40) Schwering: Aufgabe und Anschauung etc. — Progr. Coesfeld, 1889 . . . . 186—190
41) Waitz: Pädagogik. — Braunschweig, 1875 . . . . 78—81
42) Wiegand: Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. — Halle, 1848 152
43) Zerlang: Beitrag zu einer genet. Entwicklung etc. — Progr. Sorau, 1860 . . . . 147—150
44) Ziegel: Methode u. Lehrplan etc. — Progr. Schwerin a. d. Warthe, 1878 . . . . 16—26

I. Teil.

Die geometrischen Grundbegriffe.

I. Kapitel.

Der Raum.

Die Geometrie ist die Lehre von den Gebilden im Raume, wenn auf alle sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften derselben kein Gewicht gelegt wird und nur der Teil des Raumes, den sie durch ihre Gröfse, Gestalt und Lage einnehmen, in Betracht kommt.

Der Ausdruck „Raumgebilde oder räumliche Gebilde" scheint sich immer mehr einzubürgern; auch verdient er vor dem früher üblichen „Raumgröfse" entschieden den Vorzug, da sofort zu erkennen ist, dafs wir es mit eigentümlichen nur im Raume möglichen Gegenständen zu thun haben, für die der Name „Gröfse" schlechtweg leicht zu Mifsverständnissen oder falscher Auffassung führen konnte.[1] Auch war ja eines der räumlichen Gebilde bei dieser Bezeichnung nach allgemeiner Annahme ausgeschlossen: der Punkt, dessen Begriff wir thatsächlich mit dem Begriff der Gröfse auf keine Weise vereinigen können; aber bei genauerer Betrachtung erweisen sich ja auch schon Flächen und Linien dadurch, dafs sie das, was zu einer wirklichen Raumgröfse d. h. einem Körper gehört, teilweise negieren, als — wenn man überhaupt noch den Namen „Gröfse" gelten lassen will — jedenfalls „Gröfsen von ganz besonderer Art". Man vergleiche die Ausführungen über Körper, Flächen und Linien etc. im Kapitel III.

Betrachten wir nun ein geometrisches Gebilde, so fällt selbstverständlich alles, was sich auf die Lage bezieht, aus

[1]) Vergl. Kruse: Elemente der Geometrie:
„Die geometrischen Gröfsen unterscheiden sich von den übrigen Gröfsen dadurch, dafs an ihnen als eine wesentliche Eigenschaft der Begriff der Lage haftet." — H. Z. VII. p. 212.

der Betrachtung aus; denn erst wenn wir mehrere — mindestens zwei — Gegenstände in unserer Vorstellung verknüpfen, kommt der Begriff der Lage zur Existenz — die Beziehung auf das betrachtende Subjekt erzeugt für sich noch nicht den Begriff der Lage, — obwohl eine Zweiheit vorhanden ist — sondern erst die Beziehung von mindestens zwei Objekten auf einander, da das betrachtende Subjekt ja seinen Ort beliebig wählen resp. verändern kann, ohne dafs dadurch die Lage des betrachteten Objekts irgendwie beeinflufst wird.

Die Begriffe der Gröfse und Gestalt lassen sich noch vereinigen in dem Begriff der Ausdehnung überhaupt; wir würden dann die Gröfse als das Wieviel der Ausdehnung, die Gestalt als das Wie (die Art) der Ausdehnung bezeichnen müssen. Beide sind von einander vollständig unabhängig und können auch getrennt, jeder für sich, in Betracht kommen, ohne dafs dadurch die Betrachtung falsch wird. Zur vollständigen Kenntnis aber eines bestimmten Raumgebildes sind beide vereint unerläfslich.

Aus der Abstraktion von allen sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften geht hervor, dafs wir ein geometrisches Raumgebilde in keiner Weise darstellen können, dafs es ein reines Erzeugnis unseres Denkens ist. Wenn wir uns dieselben trotzdem sinnlich wahrnehmbar konstruieren, so darf nie vergessen werden, dafs wir es nur mit Bildern — und zwar genau genommen, bei möglichst sorgfältiger Nachbildung doch nur sehr unvollkommenen Bildern zu thun haben.[1]) Jedoch sind auch diese unvollkommenen Bilder geeignet, unsere Vorstellung zu unterstützen und durch äufsere Anschauung die innere, rein geistige Anschauung oder Vorstellung zu bilden und zu üben.

Einen durch Abstraktion erhaltenen Raumteil nennen wir einen geometrischen Körper oder kurzweg einen Körper, deren

---

[1]) Vergl. weiter unten Kap. III. Doch soll auch hier schon ganz besonders darauf hingewiesen werden, dafs eine solche Nachbildung überhaupt nur möglich ist für Körper, undenkbar aber für alle anderen Raumgebilde; nur Körper können wir uns bildlich darstellen, weder Flächen, noch Linien und Punkte: denn auch bei ihrer Darstellung — ja es ist wohl auch gestattet zu sagen Vorstellung — handelt es sich in der That um Darstellung von Körpern.

Substrate in der sinnlichen Wahrnehmung die physikalischen Körper der uns umgebenden Aufsenwelt sind.[1])

Da wir von allen rein physikalischen Eigenschaften abstrahieren, so verlieren auch die Gesetze, denen die physikalischen Körper unterworfen[2]) sind, für die geometrischen Körper ihre Gültigkeit, vor allen Dingen das Gesetz der Undurchdringlichkeit; wir können uns demnach die räumlichen Gebilde der Geometrie in beliebiger Anzahl an derselben Stelle des Raumes denken.

Der Raum selbst mufs im Unterricht — im Anfang wenigstens — als a priori gegeben angesehen werden und ohne eingehende Erörterung bleiben, da der Schüler durch philosophische Betrachtungen über den Raum nur verwirrt werden würde.[3]) Jedoch darf auch keine Unklarheit in irgend einer Beziehung zurückbleiben, besonders müssen die Eigenschaften des Raumes erwähnt und dem Verständnis der Schüler nahe gebracht werden.

Man wird demgemäfs bei der ersten Erklärung am besten den Kantschen Weg einschlagen und zu dem Begriff des Raumes gelangen, indem man von allen Gegenständen der Aufsenwelt — wobei ganz besonders auch der Luft als eines Körpers Erwähnung zu thun ist — abstrahiert resp. alle hinweg denkt. Das, was dann in unserer Vorstellung übrig bleibt,

---

[1]) Ich habe hier den Ausdruck physikalischer Körper als den allgemeineren gewählt. Im Unterricht wird man zwischen natürlichen und künstlichen Körpern unterscheiden resp. auf den Unterschied zwischen beiden hinweisen müssen. Als Beispiele für die ersteren können Früchte aller Art, Eier etc. genannt werden, als Beispiele der zweiten Art dienen u. a. alle Gegenstände des Lehrzimmers.

[2]) Ich bin mir wohl bewufst, dafs dieser Ausdruck nicht besonders glücklich gewählt ist, habe ihn aber doch seiner Kürze wegen, und da er wohl auch von den Lesern nicht mifsverstanden werden wird, beibehalten.

[3]) Vergl. H. Z. I. p. 228. — J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe.

p. 235: „Man geht aus von dem in jedem menschlichen Geiste vorhandenen Begriffe des Raumes (ohne Definition).“

„Oder man geht umgekehrt vom Punkte aus (der nicht definiert wird) und nennt den Weg (die Spur) eines bewegten Punktes Linie etc.“



ist der Raum; ohne dafs hier auf die Kantsche Begründung des Raumes als eines Begriffes a priori — der Form unserer äufseren Wahrnehmung — eingegangen wird, soll nur hervorgehoben werden, dafs in der That der Raum nicht unabhängig vom Subjekt gedacht werden kann; indem wir alle Gegenstände hinwegdenken, bleiben wir selbst doch übrig, d. h. wir können eben nur alle Gegenstände mit Ausnahme unserer selbst hinwegdenken.[1])

Der auf diese Weise leer gedachte, nicht wahrnehmbare Platz der wahrnehmbaren Erscheinungen der Aufsenwelt, der Körper, der vor den Gegenständen und unabhängig von ihnen in unserer Vorstellung vorhanden, auf dessen Vorhandensein die Möglichkeit des Neben- und Auseinander der Körper beruht, ist der Raum.

Seine Eigenschaften sind: 1) Unbegrenztheit, die beim Raume selbst mit Unendlichkeit identisch ist;[2]) 2) Stetigkeit; 3) Gleichartigkeit.

---

[1]) Vergl. Bartholomäi, Zehn Vorlesungen etc.

p. 15: „Es ist nämlich noch nicht ausgemacht, ob die Vorstellung des allgemeinen Raumes existieren würde, wenn keine Dinge wären. Wir stellen uns, um hierüber Aufschlufs zu erhalten, eine von aller Welt isolierte Intelligenz vor. Diese sieht nichts, hört nichts, nimmt gar nichts wahr und hat nichts zu denken. Wie soll sie unter solchen Umständen das Leere wahrnehmen, anschauen oder ersinnen? .... Daher müssen wir es vorläufig als höchst zweifelhaft annehmen, den Raum als unendlich zu setzen und als Etwas zu fassen, das im Vorstellen bestehen würde ohne Dinge.“

[2]) Vergl. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (Göttinger Abhandlungen 1868.)

„Bei der Ausdehnung der Raumkonstruktionen ins Unmefsbargrofse ist Unbegrenztheit und Unendlichkeit zu scheiden; jene gehört zu den Ausdehnungsverhältnissen, diese zu den Mafsverhältnissen. Dafs der Raum eine unbegrenzte dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei, ist eine Voraussetzung, welche bei jeder Auffassung der Aufsenwelt angewandt wird, nach welcher in jedem Augenblicke das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt und die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes konstruiert werden, und welche sich bei diesen Anwendungen fortwährend bestätigt. Die Unbegrenztheit des Raumes besitzt daher eine gröfsere empirische Gewifsheit als irgend eine äufsere Erfahrung. Hieraus folgt aber die Unendlichkeit keineswegs. —“

So scharfsinnig die Unterscheidung zwischen Unbegrenztheit und

Aus der Eigenschaft der Stetigkeit folgt unmittelbar diejenige der unbegrenzten Teilbarkeit, aus der der Gleichartigkeit diejenige der Kongruenz, unter welchem Begriff selbstverständlich nur die Möglichkeit des Zusammenfallens verstanden wird.[1])

Unendlichkeit erscheint, so tritt dieser Unterschied doch erst bei wirklich begrenzten Raumteilen, also z. B. bei Körpern in Evidenz; so ist im Riemannschen Sinne die Kugelfläche z. B. unbegrenzt, selbstverständlich aber nicht unendlich. Man sieht also, es kommt auf eine besondere Auffassung des Begriffes Unbegrenztheit hinaus, denn wir haben es doch in der That mit einem begrenzten Raumteil zu thun und die unbegrenzte Kugelfläche ist als Ganzes eine Grenze und zwar natürlich die Grenze eines begrenzten Körpers; unsere Vorstellung bezieht sich also in der That nicht mehr auf etwas Unbegrenztes, es kann also auch nicht von einer Unendlichkeit die Rede sein. Ganz etwas anderes ist es mit der Unbegrenztheit des Raumes, hier sind Unbegrenztheit und Unendlichkeit identisch. Auch Bartholomäi in seinen philosophischen Vorlesungen sagt: „Neben diesen (den Körpern) ist nun der unendliche Raum eine Thatsache; er ist wenigstens von den Mathematikern anerkannt.“ — Es sei übrigens nicht unerwähnt, daſs Unendlichkeit und Unbegrenztheit nach ihrer sprachlichen Verwandtschaft im Grunde genommen dasselbe bezeichnen. — Vergl. die Rezension von Becker, Abhandlungen etc. in H. Z. III. p. 385.

[1]) Es wird im Unterricht nicht überflüssig sein, auf diese Eigenschaften des Raumes noch näher einzugehen. So könnte man beispielsweise folgende Erklärungen dazu geben: Die Unendlichkeit ist die Ausgedehntheit nach allen Richtungen hin ohne Ende — wir können uns deshalb auch den Raum nicht etwa in einer bestimmten Form oder Gestalt denken, denn sonst würden wir eine Grenze (ein Ende) in unserer Vorstellung setzen (vergl. die vorhergehende Anmerkung); die Stetigkeit ist das lückenlose Vorhandensein des Raumes allüberall — im wesentlichen ist diese Eigenschaft mit der vorigen identisch und es wird daher gut sein, hierauf auch besonders hinzuweisen; die Gleichartigkeit sagt aus, daſs der Raum überall von gleicher Art sei — in gewisser Hinsicht wiederum dasselbe wie die Eigenschaft der Stetigkeit: überhaupt aber ein Begriff, der mit groſser Vorsicht zu behandeln ist, da er geeignet erscheint, Irrtümer zu erwecken. Mit Recht wird der Einwand gemacht werden können, daſs die Gleichartigkeit nur bei physikalischen Körpern, d. h. bei Körpern, die aus Stoff bestehen, vorhanden sein könne.

Man vergleiche zu der Bemerkung, daſs der Raum nicht in einer bestimmten Form gedacht werden dürfe, die Besprechung von Fahle, Leitfaden des mathematischen Unterrichts, durch Schwarz-Elmshorn in H. Z. II. p. 123:

„Ganz gewiſs ist jeder Körper ein begrenzter Raum — ist aber darum

Mit dieser Darstellung des Raumes und seiner Eigenschaften wird sich der Lehrer begnügen können und müssen, besonders im Anfangsunterricht, da ja das oberste Gesetz des geometrischen Elementarunterrichts dasjenige der Anschaulichkeit ist, also von einer Vorführung derjenigen Raumtheorien, die gerade in der Befreiung von der Anschaulichkeit ihre wesentliche Bedeutung sehen, abgesehen werden mufs, während andererseits eine genauere Untersuchung des Raumes als eines Begriffes erst in der Philosophie möglich ist und aus diesem Grunde ebenfalls nicht in den geometrischen Unterricht gehört.

Jedenfalls ist zu betonen, dafs der Raum nur als dreidimensionaler[1]) gelehrt wird und die logische Möglichkeit einer *n*fachen Mannigfaltigkeit des Raumes nicht einmal auch nur erwähnt wird.

Dem Prinzipe des vorliegenden Werkes gemäfs werden nun aus einer Reihe von Lehrbüchern Zitate gegeben werden, um einen Überblick über die verschiedenen Ansichten bezüglich des Begriffes Raum beziehentlich seine Darstellung im Unterricht zu gewähren, ohne dafs dabei auf Vollständigkeit ausgegangen wird, da selbstverständlich die rein philosophischen Werke aufser Beachtung gelassen werden müssen. Wenn zum Schlufs noch einige phil. Schriften erwähnt werden, so sind auch da nur einige herausgegriffen, die eigentlichen philos. Systeme sind als bekannt vorausgesetzt und als den Rahmen des vorliegenden Werkes überschreitend bei Seite gelassen. Jedoch hat sich Verfasser veranlafst gesehen, aus den Arbeiten, die sich mit dem Raume vom mathematischen Gesichtspunkte aus beschäftigen, noch einige ausführliche Zitate zu geben, um dem Leser auch über diese Bestrebungen die notwendige Kenntnis zu vermitteln.

---

umgekehrt der allgemeine Raum, weil die Vorstellung desselben sich erschliefst, wenn man die Grenzen des Körpers nach allen Seiten unbegrenzt hinausschiebt, auch als ein unbegrenzter Körper zu definieren?"

[1]) Auf den Unterschied zwischen Richtung und Dimension ist besonders zu achten. Während der Raum nach allen Richtungen ausgedehnt ist, wird er (oder vielmehr Teile desselben) nach nur drei Richtungen gemessen. Näheres hierüber bringt der Abschnitt „Dimension".

Die Eigenschaften, die allein gewöhnlich in den Elementarbüchern dem Raume zugesprochen werden, sind Stetigkeit und Unendlichkeit. Lehrbücher, in denen also dem Raume weiter keine Betrachtungen gewidmet werden, sollen unerwähnt bleiben.

Bartholomäi, Zehn Vorlesungen über Philosophie der Mathematik. — Jena 1860.[1])

Vorlesung 1. p. 11 ff. „Das Aufsereinander ist der Raum.

In diese durch die Dinge gegebene Bestimmung des Raumes greift ohne Weiteres der allgemeine unendliche Raum herein.“

Nach einer Kritik der Kantschen Lehre heifst es weiter:

„Der Raum ist zunächst das Aufsereinander, d. h. er wird gedacht bei getrennten Dingen, er ist also eine Form der Zusammenfassung. Die räumlich zusammengefafsten Dinge haben gar keine Gemeinschaft und keine Beziehung zu einander, diese wird ihnen vielmehr erst durch das zusammenfassende Denken geliehen.“

Ferner: „. . . . Unendlich viele Distanzen werden mit einander verbunden in der Vorstellung; es bildet sich der Begriff des Körpers oder der Begriff dessen, das nach allen Richtungen Distanzen zeigt.“

Im weiteren Verlauf dieser Untersuchung werden noch die Unendlichkeit des Raumes, seine Beziehung zu den Dingen — die als unzweifelhaft objektiv bezeichnet werden — und das Problem der Dimension berührt.

J. K. Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. — Berlin 1877.

„. . . . Was der Raum selbst sei, in welchem alle unsere wirklichen und eingebildeten anschaulichen Vorstellungen sich befinden, und wie wir zu seiner Wahrnehmung und zur Kenntnis seiner Eigenschaften gelangen, dies sind Fragen, deren Beantwortung in das Gebiet der Philosophie hinübergreifen würde, und die darum hier unerörtert bleiben können. Um so wichtiger ist es aber, genau festzustellen, welche Eigen-

[1]) Besprochen in Schl. Zeitschr. VI. p. 7.

schaften dem Raume a priori zugeschrieben werden müssen, damit alle Eigenschaften der räumlichen Vorstellungen als notwendige Konsequenzen derselben erscheinen."[1])

Es werden alsdann eine Reihe von Postulaten oder Axiomen aufgestellt — „wobei es gleichgültig ist, ob dieselben als Postulate der Vernunft oder des Anschauungsvermögens, also als transcendentale Wahrheiten, oder als Ergebnisse der Erfahrung und tief eingeprägter Angewöhnung aufgefafst werden —",[2]) von denen nur das erste als hier wesentlich angeführt werden soll: „Axiom I. Der Raum ist stetig, endlos, und von jedem Punkte aus nach allen Seiten auf gleiche Art ausgedehnt."

- — - -

J. K. Becker, Lehrbuch der Elementargeometrie. II. Geometrie. III. Buch.

„Der Raum, d. i. der Ort alles dessen, was wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, ist die notwendige Voraussetzung unserer anschaulichen Vorstellungen; er ist das, worin alles ausgedehnt ist, was wir als ausgedehnt wahrnehmen oder uns vorstellen. Dabei erscheint uns das im Raume ausgedehnte entweder als ein Teil des Raumes (der mathematische Körper), oder als einen Teil des Raumes ausfüllend (der physische Körper), oder als Grenze eines Raumteiles (Fläche), oder endlich als Teil oder Grenze einer solchen Grenze (Linie).

[1]) Man vergleiche mit diesen Ausführungen Beckers weiter unten zitiertes Schriftchen „Abhandlungen aus dem Grenzgebiet der Mathematik und Philosophie". Im wesentlichen decken sich die Ansichten Beckers mit denen des Verfassers, dafs also der Raum selbst im Unterricht als etwas Gegebenes zu behandeln sei und dafs es sich nur um eine Darstellung seiner Eigenschaften handeln dürfe.

[2]) Ja es dürfte wohl sogar im Unterricht gestattet sein, beides einfach zu identifizieren, da der Schüler doch wohl nicht im Stande ist, diese beiden Quellen der Erkenntnis von einander zu halten. Wenn Becker die Postulate des Anschauungsvermögens als Ergebnisse der Erfahrung oder tief eingeprägter Angewöhnung von den Postulaten der Vernunft unterscheidet, so mufs doch betont werden, dafs es sich hier um Erfahrungen handelt, die notwendige objektive Gültigkeit beanspruchen dürfen — d. h. also Erfahrung im Sinne wissenschaftlicher Erkenntnis —, weil sie resultieren aus subjektiven Bedingungen, denen alle Erscheinungen unterworfen sind.

Da alle Grenze im Raume vorgestellt werden mufs, setzen wir den Raum selbst als unbegrenzt oder grenzenlos voraus. Aus demselben Grunde erscheint er uns als stetig, d. h. als überall zusammenhängend."

Becker geht dann genauer auf den von Riemann eingeführten Begriff der „stetigen Mannigfaltigkeit" ein und untersucht an der Hand dieses Begriffes, „welche besonderen Eigenschaften den Raum von etwaigen anderen dreifach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeiten ausdehnungsloser Elemente (Punkte) unterscheiden."

Behl, Die Darstellung der Planimetrie nach induktiver Methode. — Hildesheim 1886 —
stellt sich vollständig auf den Standpunkt Kants. Er sagt:

„Die Geometrie geht von der Voraussetzung eines unbegrenzten Raumes aus.[1]) Der Begriff „Raum" läfst sich schwer erklären, da er nicht aus der Erfahrung abgeleitet werden kann, sondern aprioristisch im menschlichen Geiste liegt. Der Raum ist das nach allen Richtungen hin unendlich Ausgedehnte, aber an und für sich nichts Bestehendes oder Reelles, sondern nur eine Form für mögliche Beziehungen, demnach nur etwas Vorgestelltes; es ist die Form des äufseren Sinnes, durch den uns die Gegenstände als aufser uns und aufsereinander und nebeneinander existierend gegeben werden."

Brewer, Lehrb. d. Geom. u. eb. Trig. — Düsseldorf-Elberfeld 1822 —

---

[1]) Vergl. Bartholomäi a. a. O. p. 14:

„Auch die Frage liegt nahe, ob man nicht von dem unendlichen allgemeinen Raume ausgehen könne? Dafs es möglich ist, beweist die Erfahrung, denn man thut es fast allgemein, behauptet wenigstens es zu thun. Wir aber wollen von der Natur ausgehen. Diese zeigt uns Dinge und durch die Dinge die Räume, und der Raum ist nicht die Welt, sondern was den Raum erfüllt. Zweitens gelingt es nicht, aus dem unendlichen Raume, als einem bestimmt gegebenen Begriff, zur bestimmten Raumform zu gelangen. Die geometrischen Gebilde sind bei den geometrischen Schriftstellern thatsächlich nicht aus dem allgemeinen Raum abgeleitet, sondern aus einfachen Bestimmungen."

stellt sich auf den auch von mir für den Unterricht vertretenen Standpunkt durch die Anmerkung: „Die Geometrie nimmt den Raum als etwas Gegebenes an. Untersuchungen über die Möglichkeit oder das Wesen des Raumes gehören nicht in die Geometrie (soll wohl heifsen in ihre Behandlung auf der Schule? D. Verf.), sondern in denjenigen Teil der Philosophie, welcher Metaphysik genannt wird."

Erdmann, Die Axiome der Geometrie. Leipzig 1877.[1])

Aus diesem ausgezeichneten Werke[2]) können nur die kurzen Definitionen des Raumes und deren Folgerungen hier abgedruckt werden, im übrigen sei es zu eingehendem Studium empfohlen.

1) „Der Raum ist eine stetige Gröfse, deren Elemente durch drei unabhängige Variable eindeutig bestimmt sind und deren Krümmungsmafs den konstanten Wert Null besitzt."

2) „Der Raum ist eine dreifach ausgedehnte, in sich selbst kongruente, ebene (unendliche) Mannigfaltigkeit."[3])

Diese Definitionen bestimmen zugleich das einfachste und vollständige System der Axiome unserer Raumvorstellung, da diese nichts anderes sind, als jene Merkmale selbst ausgedrückt in den Konstruktionsbegriffen der geometrischen Wissenschaft.

---

[1]) Besprochen in Schl. Z. XXIII, p. 76.

[2]) Besonders wertvoll ist auch die reiche Litteraturangabe.

Bei dieser Gelegenheit will ich nochmals darauf hinweisen, dafs nach meiner Ansicht im Unterricht der Raum selbst ohne Erklärung bleibt und als a priori gegeben angesehen wird — und dafs ich die verschiedenen philosophischen und mathematischen Ansichten über den Raum hier nur zur Orientierung für den Lehrer wiedergebe, damit er über die Darstellung der Eigenschaften ein selbständiges Urteil sich bilden könne. (Es liefse sich allerdings erwägen, ob man vielleicht bei der Repetition der Geometrie in Prima das Raumproblem mit den Schülern diskursiv behandeln könnte.)

[3]) Die oben vom Verfasser dargestellten Eigenschaften des Raumes sind auch in diesen Definitionen enthalten. Dagegen enthalten sie andererseits auch schon die analytische Bestimmung des Raumes mittels dreier Variablen und den Begriff des Krümmungsmafses, die für den Unterricht durchaus nicht verwertbar sind, ebensowenig wie der Begriff der dreifach ausgedehnten, ebenen Mannigfaltigkeit.

Sie bestimmen jedoch noch mehr, als bloſs diese Axiome selbst, denn sie machten es uns möglich, auch den Erfahrungsbedingungen nachzuspüren, welche die Natur unserer Kongruenzbeziehungen bedingen. Wir können diese Sätze als Postulate unserer Raumvorstellung bezeichnen. Das gesuchte System der Axiome und Postulate ist demnach das folgende:

Axiome der Geometrie Euklids.[1])

I. Der Raum ist eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

II. Der Raum ist eine in sich kongruente Mannigfaltigkeit.

Postulate zum II. Axiom.

1) Es existieren in sich feste Körper.[2])

2) Die festen Körper sind vollkommen frei beweglich.

3) Die festen Körper verändern ihre Dimensionen durch eine Drehung um eine Rotationsaxe nicht.

III. Der Raum ist eine ebene oder unendliche Mannigfaltigkeit, d. h.

a) Zwischen zwei Punkten des Raumes ist nur eine gerade Linie möglich.

b) Die Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks beträgt 2 Rechte.

Dieses Axiom, das der Anschauung nicht entnommen ist, und daher auch wohl allgemein nicht als Axiom anerkannt, sondern als Lehrsatz bewiesen wird, indem man es auf das Parallelenaxiom begründet, läſst sich noch in einer anderen Form aussprechen, die vielleicht dem menschlichen Geiste einleuchtender ist. Es deckt sich nämlich mit folgendem Satz:

Die Winkelsumme in den Polygonen ist konstant.[3])

Es mögen zu der vorliegenden Frage folgende Zitate ihre Stelle finden:

---

[1]) „Geometrie Euklids" ist hier im Gegensatz zu der allgemeinen oder absoluten Geometrie gesetzt.

[2]) Der mathematische Ausdruck würde angemessener lauten: starre Körper, da dieser Ausdruck schon ein gewisses Bürgerrecht erworben hat, resp. wir mit demselben eine bestimmte Vorstellung verbinden.

[3]) Es ist mir nicht bekannt, daſs von irgend einer Seite das Axiom in dieser Form ausgesprochen worden ist. Die Bedeutung der folgenden Ausführungen scheint mir aber nicht gering, wenn man den aufgestellten Satz als das Charakteristikum der Euklidschen Geometrie wählt.

Helmholtz, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Populär-wissenschaftliche Vorträge. Heft III.

p. 42: „Der Unterschied der Euklidischen, sphärischen und pseudosphärischen Geometrie beruht, wie oben bemerkt, auf dem Werte einer gewissen Konstante, welche Riemann das Krümmungsmafs des betreffenden Raumes nennt, und deren Wert gleich Null sein mufs, wenn die Axiome des Euklides gelten.[1]) Ist sie nicht gleich Null, so würden grofse Dreiecke von grofsem Flächeninhalte eine andere Winkelsumme haben müssen, als kleine, erstere im sphärischen Raume eine gröfsere, im pseudosphärischen eine kleinere. Ferner ist geometrische Ähnlichkeit grofser und kleiner Körper oder Figuren nur möglich im Euklidischen Raume."

p. 48: „Wir können deshalb auch nicht zugeben, dafs die Axiome unserer Geometrie in der gegebenen Form unseres Anschauungsvermögens begründet wären, oder mit einer solchen irgendwie zusammenhingen.

Anders ist es mit den drei Dimensionen des Raumes. Da alle unsere Mittel sinnlicher Anschauung sich nur auf einen Raum von drei Dimensionen erstrecken, und die vierte Dimension nicht blofs eine Abänderung von Vorhandenem, sondern etwas vollkommen Neues wäre, so befinden wir uns schon wegen unserer körperlichen Organisation in der absoluten Unmöglichkeit, uns eine Anschauungsweise einer vierten Dimension vorzustellen."

Rosanes, Über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume.

„In der That wurden, zuerst wohl in den dreifsiger Jahren dieses Jahrhunderts, Zweifel an der Zuverlässigkeit des Euklidischen Axioms (nämlich dem Parallelenaxiom, dem berühmten

---

[1]) Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie.

p. 136: „Hier schien also ein indirekter Beweis gefunden, dafs der Satz von der Summe der Dreieckswinkel gleich zwei Rechten apriorisch nur deshalb unbeweisbar war, weil eben Verhältnisse vorliegen konnten, unter denen er thatsächlich nicht statt hatte."

11. des Euklid. D. Verf.) ausgesprochen. Bolyai und Lobatschewsky wiesen nach, dafs man auch dann eine widerspruchsfreie, aber von der Euklidischen verschiedene Geometrie konstruieren kann, wenn man den Satz, nach welchem die Summe der Winkel im ebenen Dreiecke gleich zwei Rechten ist, aufgiebt, von dem Legendre gezeigt hat, dafs er mit jenem Axiom äquivalent ist. Diese Geometrie, gegründet auf die Annahme, dafs die Winkelsumme irgend einen konstanten Wert unter 180° habe, wurde imaginäre, Nicht-Euklideische Geometrie genannt.“

Hier liegt ein Irrtum vor; wenn die Winkelsumme von 180° verschieden angenommen wird, so kann sie nicht mehr konstant sein, sondern ändert sich mit den Mafsverhältnissen des Dreiecks. Dafs in der That, wenn die Winkelsumme konstant angenommen wird, diese Annahme zur Folge hat, dafs die Summe 180° beträgt, geht aus den folgenden Ausführungen des Verfassers hervor. Auch Helmholtz in dem vorhergehenden Zitat, wie Riemann in dem folgenden, erkennen die Richtigkeit dieses Satzes an.

Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. — Göttinger Abhandlungen XIII.

p. 146: „Nach diesen Untersuchungen über die Bestimmung der Mafsverhältnisse einer *n*fach ausgedehnten Gröfse lassen sich nun die Bedingungen angeben, welche zur Bestimmung der Mafsverhältnisse des Raumes hinreichend und notwendig sind, wenn Unabhängigkeit der Linien von der Lage und Darstellbarkeit des Linienelements durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdrucke zweiten Grades, also Ebenheit in den kleinsten Teilen vorausgesetzt wird.“

„Sie lassen sich erstens so ausdrücken, dafs das Krümmungsmafs in jedem Punkte in drei Flächenrichtungen $= 0$ ist, und es sind daher die Mafsverhältnisse des Raumes bestimmt, wenn die Winkelsumme im Dreieck allenthalben gleich zwei Rechten ist.“

„Setzt man aber zweitens, wie Euklid, nicht blofs eine von der Lage unabhängige Existenz der Linien, sondern auch der Körper voraus, so folgt, dafs das Krümmungsmafs allent-

halben konstant ist, und es ist dann in allen Dreiecken die Winkelsumme bestimmt, wenn sie in einem bestimmt ist."

Setzen wir den Satz: „Die Winkelsumme in den Polygonen ist konstant" an die Spitze, so ergiebt sich aus ihm, dafs die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt, im Viereck vier Rechte, im Fünfeck sechs Rechte und so fort. Allerdings läfst sich, wie es scheint, nicht allgemein beweisen,[1]) dafs im nEck unter dieser Voraussetzung die Summe der Winkel $(n \cdot 2R - 4R)$ ist, aber ich hebe ausdrücklich hervor, dafs für die verschiedenen Vielecke sich die Übereinstimmung mit den bekannten Resultaten der Euklidischen Geometrie ergiebt, ohne dafs man nötig hat, auf das Dreieck zu rekurrieren. Ist aber dieses festgestellt, dafs das Dreieck nicht zum Beweise nötig ist, dann können wir den Satz bestimmter aussprechen, ohne dafs dadurch eine Einschränkung involviert wird:

Die Winkelsumme im Dreieck ist konstant.

Beweis für das Dreieck und Viereck:

Man teile das Dreieck durch eine Transversale T durch eine Ecke in zwei Dreiecke; die Summe der Winkel betrage im Dreieck x; dann ist

$$x(\text{von } ABC) = x(\text{von } ACD) + x(\text{von } BCD)$$

$-\,2R$ (die Summe der Winkel an D) oder:

$$x = x + x - 2R.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$x = 2R.$$

Man könnte auch von einem Punkte im Inneren nach den Ecken Gerade ziehen und so das Dreieck in drei Dreiecke zerlegen. Dann erhalten wir:

$$x(\text{von } ABC) = x(\text{von } AOC) + x(\text{von } BAC) + x(\text{von } ABC)$$

$-\,4R$ (die Summe der Winkel um O) oder:

$$x = x + x + x - 4R.$$

Das Resultat ist dasselbe:

$$x = 2R.$$

---

[1]) Unter „allgemein" beweisen verstehe ich, dafs sich der Satz unabhängig vom Dreieck beweisen läfst, also direkt aus seiner Eigenschaft als nEck.

Das Viereck teile man durch eine Gerade in zwei Vierecke, so ist, wenn y die Winkelsumme im Viereck bedeutet:

$$y_{(ABCD)} = y_{(AEFD)} + y_{(EBCF)}$$

$- 2 \cdot 2R$ (die Winkel bei E u. F). Daraus ergiebt sich:

$$y = 2y - 4R.$$
$$y = 4R.$$

Oder man teilt das Viereck durch zwei Gerade in 4 Vierecke; die Winkelsumme der Vierecke wiederum $= y$ angenommen, ergiebt sich:

y (von ABC) $= y$ (von $AEOH$) $+ y$ (von $EOFB$) $+$
y (von $OFCG$) $+ y$ (von $GOHD$) $- 4R$ (den Winkeln um O)
$- 4 \cdot 2R$ (den Winkeln bei E, F, G, H). Hieraus ergiebt sich:

$$y = 4y - 12R$$
$$3y = 12R.$$
$$y = 4R.$$

Wir sehen also — was mir von besonderer Wichtigkeit zu sein scheint —, daſs sich der Beweis durchführen läſst, ohne daſs man das Dreieck dazu nötig hat.

Man vergleiche übrigens mit diesen Ausführungen: Frischauf, Absolute Geometrie, 5, 6 und 7.

Frischauf, Elemente d. Geom. — Graz 1870.

Der Ausgangspunkt[1]) der Geometrie ist der unbegrenzte (leergedachte) Raum; demselben wird die Eigenschaft der Stetigkeit, also auch der unbegrenzten Teilbarkeit zugedacht.

Kries, Lehrbuch der rein. Mathemat. II. Hauptteil. — Jena 1817.

Die Ausführungen sind zwar nicht gerade originell, jedoch

---

[1]) Vergl. weiter unten die Definitionen des Begriffes, was ist Geometrie. Ferner Kries (folg. Zitat 4).

wird in ihnen das Notwendigste in klarer Form gegeben, wie wir es selbst den Schülern zum Teil bieten können,[1]) so dafs ich glaubte, Kries' Darstellung nicht übergehen zu sollen:

1) Diejenigen Gröfsen, welche den Gegenstand der Geometrie ausmachen, sind mit dem Beinamen stetiger Gröfsen bezeichnet worden.[2])

2) Die Stetigkeit einer Gröfse besteht in dem ununterbrochenen Zusammenhang ihrer Teile. Das Zusammenhängen der Teile aber setzt voraus, dafs die Teile selbst aufser einander oder nebeneinander liegen. Beides zusammen, das Aufsereinanderliegen der Teile und ihr ununterbrochener Zusammenhang, giebt den Gröfsen eine Ausdehnung.

3) Ausgedehnte Gröfsen also machen, insofern sie ausgedehnt sind, den Gegenstand der Geometrie aus.

4) Abstrahieren wir an einem ausgedehnten Gegenstande von allem, was nicht zur blofsen Ausdehnung desselben gehört, so bleibt uns nur der Raum übrig, den er einnimmt. Die Ausdehnung also stellt sich uns als etwas Räumliches dar. Wir müssen daher den blofsen Raum als das eigentliche *Gebiet*[3]) der Geometrie ansehen.

5) Der Raum ist von den physischen Körpern in ihm ganz verschieden. Die letzteren erscheinen uns als etwas Zufälliges in ihm, das wir in Gedanken aus ihm hinwegnehmen können.[4]) Wenn sie also gleich, ihrer Ausdehnung wegen, geometrisch betrachtet werden können, so bestimmen sie doch nicht den Gegenstand der Geometrie, die ganz unabhängig von ihnen ist.

---

[1]) Falls man nicht der Ansicht des Verfassers beipflichtet, sondern eine Raumerklärung im Unterricht für nötig hält.

[2]) Vergl. Einleitung 4 zum Lehrbuch.

[3]) Nicht aber als den Gegenstand der Betrachtung.

[4]) Es ist nicht unwesentlich, auf die Verschiedenheit zwischen physischen und geometrischen Körpern in dieser Beziehung ganz besonders aufmerksam zu machen. Während wir von den sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften absehen, sie hinwegdenken können und dadurch aus dem physischen Körper den geometrischen erhalten, können wir nicht umgekehrt das Räumliche — die Ausdehnung — von dem Körper wegdenken und nur etwa Stoff, Farbe etc. als vorhanden ansehen. Auch im Unterricht wird der Hinweis hierauf von Nutzen sein.

6) Ebensowenig können wir den Ursprung unserer Vorstellung des Raums von den physischen Gegenständen in ihm ableiten, da der Raum weder eine Eigenschaft dieser Dinge ist, noch durch Zusammensetzung derselben erzeugt wird. Wir müssen also die Quelle jener Vorstellung, ebenso wie die der Vorstellung der Vielheit, in unserm Gemüt aufsuchen.

7) Wir können daher dem Raum Prädikate beilegen, die ihrer Natur nach nie aus der Erfahrung genommen sein können und doch die gröfste Gewifsheit haben, ja wovon wir uns das Gegenteil beim Raum gar nicht denken können — das sind die Prädikate der Stetigkeit und Unendlichkeit.[1])

8) Ebenso erkennen wir unmittelbar mit apodiktischer Gewifsheit, dafs der Raum drei verschiedene Abmessungen hat oder nach drei verschiedenen Richtungen ausgedehnt ist.[2])

Lesekamp, Elemente der Geometrie. — Kassel 1879.[3])

„Der Raum ist ununterbrochen (stetig, kontinuierlich), von unbegrenzter Ausdehnung und in allen seinen Teilen gleichartig.“

Er fügt also zu den beiden bekannten Eigenschaften des Raumes noch diejenige an, dafs die Teile unter sich gleichartig sind, und macht dadurch den Raum zu einer mathematischen Gröfse.

Eduard Müller, Elemente der Geometrie.[4]) — Braunschweig 1869.

p. 1—8. 1) „Der Weltraum ist das, worin alles Sinnliche aufser und neben einander ist, und was zugleich in allem Sinnlichen aufser und neben einander ist.“[5])

---

[1]) Ich möchte als drittes Prädikat hier noch einmal erwähnen: Durchdringlichkeit (Kongruenz). Raum kann aber nicht nur mit Raum kongruieren, sondern auch mit jedem physischen Körper.

[2]) Man vergleiche, was an anderen Stellen über die Unterscheidung von Richtungen und Abmessungen oder Dimensionen gesagt ist.

[3]) Besprochen in H. Z. XII. p. 120—121.

[4]) Ausführlich besprochen in H. Z. I. p. 323—332 durch Buchbinder-Schulpforta.

[5]) Siehe Nr. 7 des Kriesschen Lehrbuchs.

2) „Der Raum ist das In- und Aufser- und Nebeneinandersein, und das In- und Aufser- und Nebeneinanderseiende ist das Räumliche.“

Von den ausführlichen Bestimmungen und Untersuchungen des Raumbegriffs, die sich hieran anschliefsen, möge nur noch folgendes erwähnt werden und im Übrigen auf das ganze Werk als äufserst lesenswert mit Nachdruck hingewiesen werden.

3) „Der Raum ist extensiv und intensiv; er ist extensiv (ausgedehnt), heifst, er ist auseinander; er ist intensiv, heifst, er ist ineinander.“

4) „.... Je nachdem der leere, reine Raum noch in äufserer Existenz gedacht oder nur in Gedanken gesetzt wird, — in der Einbildung, Phantasie — ist der leere Raum entweder abstrakter (äufserer) oder ideeller (innerer).“

5) „Der abstrakte Raum ist nur ein einziger (ein Weltenraum); der ideelle kann willkürlich, beliebig oft gesetzt werden.“[1])

Es folgt sodann die Ableitung der drei Dimensionen des Raumes aus der subjektiven Anschauung der Menschen von den drei Gegenden des Weltraums: vorn — hinten, rechts — links, oben — unten.[2])

Johannes Müller, Lehrbuch der allgemeinen Planimetrie. — Bremen 1870.

„Die Vorstellung des allgemeinen Raumes ist unveränderlich.“

„Der Raum hat zwei Haupteigenschaften, erstens er hat Ausdehnung, d. h. er gewährt die Möglichkeit der Bewegung,[3])

---

[1]) Daraus geht hervor, dafs das Gebiet der Geometrie der ideelle (innere) Raum ist. (Um Mifsverständnissen vorzubeugen, sei also ausdrücklich erwähnt, dafs die Einheit des Raums von der willkürlichen, beliebig häufigen Setzung unberührt bleibt)

[2]) Aus dieser subjektiven Herleitung der drei Dimensionen mufs die objektive Gültigkeit (Realität) derselben geschlossen werden. — Man vergleiche Kants Abhandlung: Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume.

[3]) Hier finden wir also zuerst ein mechanisches Moment in die reine Geometrie hineingetragen, und zwar schon beim ersten Begriff, dem-

und er hat diese Eigenschaft im höchsten Grade, d. h. er ist nach jeder Richtung unendlich ausgedehnt (man kann sich die Bewegung in jeder Richtung ohne Aufhören fortgesetzt denken)."

„Zweitens hat der Raum Teilbarkeit, d. h. es ist möglich, sich im allgemeinen Raume besondere Räume (Örter) zu denken, denen die Ausdehnung nicht mehr im höchsten, sondern in einem irgendwie beschränkten Grade zukommt. Auch die Teilbarkeit hat der Raum im höchsten Grade, d. h. er ist in jeder Richtung unendlich teilbar."

Nagel, Lehrb. d. eb. Geometrie. — Ulm 1873.

Nagel geht vom Körper aus, eine originelle, aber wenig glückliche Betrachtungsweise, die auch den jetzt allgemein geltenden Prinzipien der Behandlung der Grundbegriffe widerspricht.

1) „Ein Körper ist eine Gröfse, welche nach drei Richtungen ausgedehnt ist,[1]) oder drei Dimensionen hat, Länge, Breite und Höhe."

„Denkt man sich diese Ausdehnungen bis ins Unendliche fortgehend, so erhält man den unendlichen Raum; denkt man sie sich aber begrenzt, so erhält man einen Raumteil, oder Körper im engeren Sinne."

Wir haben es hier offenbar mit einem circulus zu thun, vom Körper zum Raum und vom Raum zum Körper. Diese Erklärung hat jedenfalls bedeutende Schwächen.

Rausenberger, Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt. — Leipzig 1887.[2])

---

jenigen des Raumes. Da die Geometrie ohne den Begriff der Bewegung auf ihre natürlichsten und fruchtbarsten Betrachtungen, die anschaulichen, verzichten müfste, so ist es nicht ungeschickt, denselben so zeitig als möglich mit den geometrischen Begriffen zu verflechten.

[1]) Die Verwechslung von ausgedehnt sein und gemessen werden kehrt auch hier wieder. Der Körper ist nach allen Richtungen ausgedehnt; er wird nach drei Richtungen gemessen. Es ist jedenfalls besser, in dem letzteren Falle ganz konsequent statt des Wortes „Richtung" die Worte „Dimension" oder „Abmessung" zu gebrauchen, um ein für allemal Mifsverständnissen vorzubeugen.

[2]) Dieses ausgezeichnete Werk, auf das ich schon in der Einleitung

Rausenberger stellt den Raumbegriff unter diejenigen, die keiner Erklärung bedürfen resp. die für die Elementargeometrie a priori gegeben sind.

„Sämtliche Gegenstände der Anschauung erscheinen uns in der Form des Raumes; weitere Erörterungen darüber, was der Raum sei, würden sich nur im Zirkel bewegen und den Begriff nicht klarer machen;[1]) wir müssen voraussetzen, dafs jeder Mensch, der überhaupt an die Beschäftigung mit der Geometrie herantritt, mit dem Worte Raum eine bestimmte Vorstellung verbindet."

Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Mafses etc. — Leipzig 1874.[2])

Die Definition Schlömilchs bietet zwar nichts Originelles, soll aber mitgeteilt werden,[3]) da sie das Bekannte in klarer Form vollständig giebt:

„Vorausgesetzt wird, dafs man die Grundeigenschaften[4]) des Raumes bereits kenne; diese sind:

1) Ausdehnung nach den drei verschiedenen Richtungen[5]) der Länge, der Breite und der Höhe (Dicke oder Tiefe),

---

aufmerksam gemacht, kann den Lesern ganz besonders empfohlen werden. Eine Rezension des Werkes findet sich in Hoffmanns Zeitschrift, XX, p. 517—521. Es heifst darin: „Ohne Zweifel hat er (der Verf.) ein gutes Buch geschrieben, mit welchem ein Fortschritt zum Bessern gemacht ist, und welches von ähnlichen Arbeiten sich vorteilhaft abhebt .... Die reichhaltigen Litteraturangaben .... machen das Werk besonders wertvoll, das wir dem mathematisch gebildeten Publikum hiermit warm empfohlen haben möchten."

[1]) Ich kann mich leider hier mit Rausenberger nicht völlig einverstanden erklären, vorausgesetzt, dafs ich den Sinn dieser Stelle richtig aufgefafst habe. Es scheint, als wenn jede Erörterung des Raumbegriffs als unnütz, ja womöglich schädlich zurückgewiesen wird. Das ist doch wohl zu weit gegangen.

[2]) Eine neuere Auflage (die 7.) ist 1888 erschienen; die Seitenzahl ist unverändert. — Vergl. H. Z. VI. p. 160—166.

[3]) Vergl. Kries weiter oben.

[4]) Schlömilch vermeidet es also auch auf das Wesen des Raumes einzugehen und giebt nur seine Eigenschaften.

[5]) Vergl. die Bemerkung zu Nagels Geometrie.

welche man die drei Dimensionen des Raumes zu nennen pflegt;

2) Unendlichkeit, so dafs also die Möglichkeit räumlicher Gegenstände nirgends aufhört;

3) Stetigkeit (Kontinuität), derzufolge an keiner Stelle eine Unterbrechung des Raumes vorhanden ist;[1])

4) Gleichartigkeit aller Teile des Raumes, vermöge welcher verschiedene Räume als Teile eines und desselben unendlichen Raumes angesehen werden können.

Snell, Lehrbuch der geradlinigten Planimetrie. — Leipzig 1857.

„Der Raum als Ganzes betrachtet ist nicht Gegenstand der Geometrie.[2]) Derselbe bildet nur die Sphäre, innerhalb deren die Geometrie sich bewegt. . . . . Für die Zwecke der Geometrie genügt es, sich an dem Raum als Ganzem, oder von dem Raum überhaupt folgende Eigenschaften zu vergegenwärtigen, von denen vorausgesetzt wird, dafs wir sie als mit der Vorstellung einer räumlichen Ausdehnung unmittelbar und notwendig verbunden denken müssen.[3]) Erstens: Der Raum ist unendlich (weil die räumliche Ausdehnung in sich selbst keinen Abschlufs und keine Grenze hat).

Zweitens: Der Raum ist stetig oder kontinuierlich oder lückenlos (weil dasjenige, was die Teile des Raumes trennt, wiederum Raum ist).

Drittens: Der Raum ist teilbar und zwar teilbar ins Unendliche (folgt aus 1).

---

[1]) Die Form, in der hier die Eigenschaften der Unendlichkeit und der Stetigkeit gegeben sind, läfst den Zusammenhang zwischen beiden, auf den ich oben hingewiesen, deutlich erkennen.

[2]) Vergl. Frischauf a. a. O. u. Kries a. a. O. 4.

[3]) Snell sieht also den Raum mit seinen Eigenschaften als a priori gegeben an. Hervorzuheben ist, dafs Snell die allseitige Ausdehnung des Raumes als eine besondere Eigenschaft aufstellt und sie nicht, wie üblich, mit der Unendlichkeit einfach identifiziert. Jedenfalls ist ohne die Eigenschaft der allseitigen Ausdehnung diejenige der Unendlichkeit unmöglich, weil wir ja sonst nach irgend einer Seite hin eine Grenze haben würden. Die Unendlichkeit ist durch die allseitige Ausdehnung bedingt, ohne dafs auch das Umgekehrte der Fall ist.

Viertens: Der Raum ist sowohl der Zahl als seiner inneren Wesenheit nach nur Einer.[1])

Fünftens: Die Ausdehnung des Raumes ist eine allseitige, oder der Raum ist ausgedehnt nach allen Richtungen.

Sonnenburg, Lehrbuch der gesamten Elementar-Geometrie. — Bremen 1868.

Der Raum ist formlose[2]) Ausdehnung nach allen Richtungen (nach Länge, Breite und Höhe oder Tiefe) in's Unendliche hin.

Der Raum ist das Nebeneinandersein[3]) oder der Raum ist stetig oder kontinuierlich, d. h. man kann in ihm willkürlich gewisse Abschnitte machen oder Teile unterscheiden, die aber alle so zusammenhängen, dafs da, wo der eine aufhört, gleich der andere anfängt, oder wo der eine Teil immer in den andern übergeht."

Worpitzky, Elemente der Geometrie. — Berlin 1871.

„Der Raum ist die Abstraktion von den beobachteten einzelnen Körpern auf einen Körper, welcher die durch die Sinne gegebenen Körper sämtlich als Teile enthält."[4])

---

[1]) Vergl. E. Müller a. a. O. 5 und meine Anmerkung. Es ist die Eigenschaft gemeint, die sonst Gleichartigkeit genannt wird.

[2]) Dafs der Begriff der Form mit dem des Raumes nicht vereinigt werden könne, ist auch von mir hervorgehoben worden und aus dem Wesen der Unendlichkeit begründet worden. Streng genommen enthalten sich die Begriffe gegenseitig; was keine Form hat, kann keine Grenzen haben, ist also unendlich (vergl. weiter oben meine Bemerkungen zu Riemanns Auseinandersetzungen); was unendlich ist, kann keine Form (Gestalt) haben, sonst hätte es Grenzen.

[3]) Das Nebeneinandersein bezieht sich hier nicht auf das Raumerfüllende — sonst hätte es auch besser heifsen müssen: die Möglichkeit des Nebeneinanderseins —, sondern auf den Raum selbst.

[4]) Zweierlei ist es, was dieser Definition entgegensteht: Einmal wird dadurch der Raum zu einem rein empirischen, aus der Beobachtung der sinnlich wahrnehmbaren Körper genommenen Begriff; dann aber scheint die Bezeichnung desselben als Körper ganz besonders unglücklich gewählt, da der Irrtum dadurch hervorgerufen wird, als sei der Raum etwas Begrenztes.

Wagner, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Hamburg 1874.

„Dasjenige, in welchem wir uns befinden, nennen wir den Raum (Weltraum). Denken wir uns alle Gegenstände aus demselben entfernt, so bleibt der leere oder absolute Raum, oder die Raumform übrig.[1])

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

„Dem Raume wird Unendlichkeit, Stetigkeit (Kontinuität) und Gleichartigkeit beigelegt; also in Absicht auf die Möglichkeit der räumlichen Gegenstände findet keine Grenze, in Absicht auf die Folge der räumlichen Teile keine Unterbrechung, und in Absicht auf die Beschaffenheit der Teile des Raumes keine Verschiedenheit statt."[2])

Es handelt sich in den angeführten Zitaten, wie man erkennt, im wesentlichen um die Darstellung der Eigenschaften des Raumes, weniger um die Definition des Raumbegriffs selbst, entsprechend dem Zwecke der angezogenen Werke. Über den Raumbegriff selbst vergleiche man noch folgende Werke (vergl. die Anm. zu Erdmann, Axiome):

Cohen, Kants Kritik der Erfahrung. — Berlin 1885.

Du Bois-Reymond, Reden. I. Folge. Vortrag VI „Über die Grenzen des Naturerkennens".

Gino Loria, Die hauptsächlichsten Theorieen der Geometrie, übersetzt von Schütte. — Leipzig 1888.

Helmholtz, Populäre wissenschaftliche Vorträge. III. Heft. Vortrag II „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome".

Wundt, System der Philosophie. — Leipzig 1889.

Wundt, Logik. — Leipzig 1883.

Zöllner, Über die Natur der Kometen.

Dühring, Krit. Geschichte der allgem. Prinzipien der Mechanik.

Ferner ist zu vergleichen die schon oben erwähnte reich-

---

[1]) Offenbar im Kantschen Sinne: Form unserer äußeren Wahrnehmung.

[2]) Ich möchte diese kurze Darstellung als besonders gelungen hervorheben.

haltige Litteratur, die sich in Erdmann, Die Axiome der Geometrie, angegeben findet.

Von Programmen, die mir zu Gebote standen, ist an dieser Stelle eins erwähnenswert.

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Maſses. — Braunschweig 1887.

In dieser Abhandlung wird der Untersuchung des Raumes ein weites Feld eingeräumt. Die Beziehungen von Raum und Zeit, von Raum und Auſsenwelt, leerem Raum und raumerfüllendem Etwas (Materie) werden untersucht.

„Der Raum tritt uns durchaus als ein geschlossenes Ganzes gegenüber, die Materie dagegen als eine Gesamtheit einzelner Teile . . .“[1])

„Der Raum ist vollständig widerstandslos ohne äuſsere und innere Grenzen, d. h. überall gleichartig, lückenlos, unbegrenzt ausgedehnt.“[2])

Klügels Wörterbuch giebt folgende Erklärung:

„Raum ist die unbegrenzte, bloſs im Verstande gedachte, nach allen Richtungen hin sich erstreckende Ausdehnung, worin der Geometer nach Belieben, uneingeschränkt seine Linien ziehen und seine Flächen ausbreiten kann.“

Es wird dann sofort auf die Bestimmung eines Punktes durch seine drei Koordinaten eingegangen und der physische Raum mit dem „Raum an sich“ verglichen. Es heiſst dann:

„Leibnitz nannte diesen physischen Raum sehr passend die Ordnung der nebeneinander befindlichen Dinge.“

Grunerts Archiv. 49. p. 180. L. v. Pfeil.

„Der Raum ist ein einfacher Begriff. Länge, Breite

---

[1]) Daraus würden die Eigenschaften der Stetigkeit und Gleichartigkeit unmittelbar zu folgern sein. Die Hervorhebung der Einheit des Raumes gegenüber der Gesamtheit einzelner Teile bei materiellen Gegenständen erscheint besonders glücklich.

[2]) Die Eigenschaft widerstandslos zu sein haben wir als „Durchdringlichkeit“ bezeichnet. Aus ihr folgt die Kongruenz. Man vergleiche übrigens die Zitate aus Wernickes Programm, die beim Körper (also in Kapitel III) angeführt sind.

und Dicke sind ebenfalls einfache Begriffe. Ebenso ist der Ort eines Dinges ein einfacher Begriff.“[1])

Hieran mögen sich noch folgende Zitate schliefsen:

Helmholtz, Pop. wiss. Vorträge III. 2. Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome.

p. 25: „Aufserdem sprechen die geometrischen Axiome Sätze aus, welche die Anzahl der Dimensionen sowohl des Raumes als seiner Flächen, Linien, Punkte bestimmen und den Begriff der Kontinuität dieser Gebilde erläutern, wie die Sätze, dafs die Grenze eines Körpers eine Fläche, die einer Fläche eine Linie, die einer Linie ein Punkt, und der Punkt unteilbar ist, und die Sätze, dafs durch Bewegung eines Punktes eine Linie, durch Bewegung einer Linie eine Linie oder Fläche, durch die einer Fläche eine Fläche oder ein Körper, durch Bewegung eines Körpers aber immer nur wieder ein Körper beschrieben werde.“

p. 36: „Somit ist also der uns bekannte Raum, in dem wir leben, eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Punkten, eine Fläche eine zweifache, eine Linie eine einfache.“

„Die Zahl der Abmessungen, welche nötig ist um die Lage eines Punktes zu geben, ist gleich der Anzahl der Dimensionen des betreffenden Raumes. In einer Linie genügt der Abstand von einem festen Punkte, also eine Gröfse;[2]) in einer Fläche mufs man schon die Abstände von zwei festen Punkten angeben, im Raume von dreien, um die Lage des Punktes zu fixieren.“

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844.

„Da eine Form weiter nichts ist, als ein auf bestimmte

---

[1]) Ort ist hier in dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, nicht in dem geometrischen verstanden: die Stelle, wo sich ein Ding befindet, nicht die Stelle, wo es sich befinden kann.

[2]) Das stimmt nicht, sondern in der Linie sind zwei feste Punkte erforderlich, oder ein Punkt und eine Richtung, also zwei Bestimmungsstücke. Analoges gilt für Fläche und Raum.

Weise begrenzter Raum, so mufs sie auch die allgemeinen Eigenschaften des Raumes besitzen. Nun ist aber der Raum:

1) in allen seinen Teilen durchaus gleichartig, oder homogen;

2) in allen seinen Teilen ununterbrochen zusammenhängend, oder stetig;

3) in jede beliebige Anzahl von Teilen zerlegbar, oder unbeschränkt teilbar;

4) in seiner Ausdehnung nach allen Seiten hin ohne Grenzen, oder unbegrenzt grofs;[1])

folglich mufs auch jede Form ein homogenes, stetiges, unbeschränkt teilbares und in jeder beliebigen Gröfse denkbares Ganze sein.

Der Raum dehnt sich ferner nach drei Richtungen hin aus, nämlich nach Länge, Breite und Dicke."

Crelle, Über Parallelen-Theorieen etc. — Berlin 1816.

„Vorstellung heifst, was die Dinge dem Verstande sind."

„Erste Vorstellung heifst, die auf keine andere sich bezieht."

„Erste Vorstellungen für die Geometrie sind Raum, Ort, Lage, Menge."

V. Schlegel, Über den sogenannten vierdimensionalen Raum. — Berlin 1889.

„Wir sehen aber auch, wie bei allen diesen Fortschritten die Geometrie in einer bestimmten Hinsicht den Charakter einer Erfahrungswissenschaft bewahrt. Wenn sie auch längst über das in ihrem Namen liegende beschränkte Ziel, die Thatsachen der Ebene zu erforschen, hinausgegangen war und den Raum in den Kreis ihrer Betrachtung gezogen hatte, unseren Weltraum mit der Fülle der in ihm teils wirklich existieren-

---

[1]) Dafs man bei dem Begriffe der Unbegrenztheit eine gewisse Vorsicht walten lassen müsse, geht aus Riemanns Habilitationsschrift hervor. Man vergleiche die Anmerkung auf Seite 120. Es wird sich danach immer empfehlen, die Identität von Unbegrenztheit und Unendlichkeit beim Raume ausdrücklich hervorzuheben.

den, teils gedachten körperlichen Gebilde: aus diesem a priori gegebenen Gebiete war sie nie herausgekommen .... Auch die philosophischen Spekulationen und wechselnden Ansichten über das Wesen dieses Weltraums hatten auf die Richtung und den Charakter der geometrischen Forschung keinen Einfluſs gehabt; aus der Erfahrung nahm man die Grundlage der Geometrie, in dem Erfahrungsraume vollzogen sich ihre Operationen, entstanden und blieben ihre Gebilde."[1])

Nachdem Schlegel sodann die Ausdrücke „vierte Dimension des Raumes" und „vierdimensionaler Raum" beleuchtet und ersteren als ein Unding und als auf einem Miſsverständnisse beruhend zurückgewiesen, sagt er: „Dieser 'vierdimensionale Raum' ist also ein reines Produkt mathematischer Spekulation, dient nur mathematischen Zwecken, und um die Frage nach seiner etwaigen wirklichen Existenz kümmert sich kein Mathematiker."[2])

---

[1]) Schlegel definiert den Raum als einen a priori gegebenen, d. h. also als einen vor aller Erfahrung und von dieser unabhängig bestehenden Begriff. In einem scheinbaren Widerspruch damit scheint es zu stehen, wenn es dann heiſst, aus der Erfahrung nahm man die Grundlagen der Geometrie; jedoch findet dieses sofort seine Erklärung in dem folgenden: „in dem Erfahrungsraume vollzogen sich ihre Operationen", d. h. die Übertragung der im „Raume a priori" geltenden Sätze und Konstruktionen auf den „Weltraum unserer Erfahrung" stieſs nirgends auf eine Schwierigkeit oder einen Widerspruch; überall entsprachen die Verhältnisse der Erfahrungswelt derjenigen der geometrischen Gebilde.

[2]) An einer späteren Stelle derselben Abhandlung sagt Schlegel: „Aber so einfach auch für das abstrakte Denken der Fortschritt in den vierdimensionalen Raum sich oft gestaltet, immer wieder macht sich der Mangel an Anschaulichkeit bei allen Begriffen und Sätzen, welche diesen Raum betreffen, auf das Störendste geltend, und selbst geübte Forscher sind Irrtümern aus diesem Anlaſs nicht entgangen. Man hat daher auch nach verschiedenen Richtungen überlegt, wie wohl diesem Mangel abzuhelfen sei. Die gründlichste Abhilfe wäre freilich die, daſs es uns gelänge, unsere geometrische Vorstellungskraft in der Weise auszubilden, daſs es uns möglich würde, vierdimensionale Gebilde uns im Geiste ebenso vorzustellen, wie es mit den dreidimensionalen Gebilden der Fall ist." „Es ist aber leicht einzusehen, daſs dieser Gedanke gänzlich hoffnungslos ist." „Es ist daher auch dem Geiste unmöglich, sich irgend welche Vorstellungen auf diesem Gebiete zu bilden .... wir können uns nur solche Gegenstände und Gebilde vorstellen, von denen

Es wird sodann ausgeführt, wie man von der „Nicht-Euklidischen“ Geometrie ausgehend auch zu dem Gedanken kam, den ebenen Raum als einen Spezialfall, nämlich von der Krümmung Null, anzusehen, einer allgemeinen Gattung gegenüber, die von beliebiger von Null verschiedener positiver oder negativer Krümmung sei.

„Selbstverständlich verzichtete man hier von vornherein auf jeden Versuch, einen derartigen Raum wirklich aufzufinden; auch war man in der Erkenntnis der Bedeutung der abstrakten Geometrie schon weit genug vorgeschritten, um diese Räume nicht deshalb als widersinnige Denkprodukte zu verwerfen, weil unsere Erfahrung über die Existenz eines einzigen krümmungslosen Raumes (resp. von der Krümmung Null) uns verbot, diese Räume als wirklich existierend anzusehen. Dieselben waren eben Produkte mathematischer Überlegung, wie tausend andere geometrische Gebilde, nur dafs sie der Anschaulichkeit entbehrten.“[1])

Das gemeinsame Gebiet dieser drei Arten des dreidimensionalen Raumes[2]) ist nun der vierdimensionale Raum von der Krümmung Null. Analog kann dieser abstrakte Prozefs der Raumbildung auf Räume von beliebig vielen Dimensionen führen.

Die Ausdehnung des Raumbegriffs auf mehr als drei Dimensionen aus der Betrachtung der geometrischen Bedeutung von den höheren Potenzen oder von den Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten wird alsdann erwähnt.

Ich mufs auf diese Vergleichung von arithmetischen und

---

wir, wenn wir sie nicht schon gesehen haben, doch wenigstens begreifen, dafs wir sie sehen könnten.“

Man vergleiche hierzu die Ausführungen des Kapitel III.

[1]) Hier tritt Schlegel in einen gewissen Widerspruch mit seinen Ansichten, die in der vorhergehenden Anmerkung zitiert sind: danach sind die Nicht-Euklidischen (unebenen) Räume nicht Gebilde „wie tausend andere geometrische Gebilde“, denn es fehlt ihnen gegenüber eben an der Möglichkeit, sie vorzustellen oder überhaupt ihre Vorstellbarkeit zu begreifen. Deshalb ist diesen Räumen auch jede Existenz, aufser der logischen abzusprechen.

[2]) Von denen also nur derjenigen Art, die die Krümmung Null hat, eine reale Existenz zukommt.

geometrischen Mannigfaltigkeiten und die daraus gezogenen Folgerungen näher eingehen, da es sich hier — meines Erachtens — um einen verhängnisvollen Grundirrtum handelt. Schlegel sagt: „Neben den Betrachtungsweisen der Nichteuklidischen Geometrie boten sich aber auch noch andere Wege, um zu einer Ausdehnung des Raumbegriffs auf mehr als drei Dimensionen zu gelangen. Namentlich hätte die von altersher bekannte und seit Descartes zur Auffindung neuer Wahrheiten planmäfsig ausgenutzte Anwendung des Zahl- und Mafsbegriffes auf die Geometrie schon längst zur Ausführung jener Verallgemeinerung führen können, wenn nur irgend eine zwingende Veranlassung sich geboten hätte. Bedenkt man nämlich, dafs eine einfache Zahl a die Länge einer gemessenen Strecke darstellt, die zweite Potenz dieser Zahl, a^2, den Flächeninhalt des über der Strecke a als Seite errichteten Quadrats, und die dritte Potenz a^3 den Rauminhalt des über diesem Quadrate als Grundfläche konstruierten Würfels, so entsteht naturgemäfs die Frage nach der geometrischen Bedeutung der folgenden Potenzen a^4, a^5 u. s. w., und man sieht leicht, dafs diese Gröfsen die Resultate der einfachsten Inhaltsbestimmungen in den Räumen mit 4, 5 und mehr Dimensionen sind, sobald man sich nur entschliefst, diesen Räumen und den für sie geltenden Geometrieen das Bürgerrecht in der Geometrie zu gewähren, trotzdem dafs die Anschauung uns hier überall in Stich läfst."

Diese Erklärung der mehrdimensionalen Räume als eine Folge der geometrischen Analogie mit den Potenzen von höheren Exponenten ist aber auf eine Verkennung der eigentlichen Vergleichspunkte, welche Arithmetrik und Geometrie für diese Fragen zeigen, zurückzuführen.

Die Bedeutung eines Produktes ist in der Geometrie nach einer ursprünglich willkürlichen Fortsetzung die eines Rechtecks,[1]) indem man die Faktoren als Mafszahlen von Strecken

[1]) Vergleiche A. Thaer in Rethwischs Jahresberichten. II. Jahrgang. — B. 199.

„Wenn man von einem 'Produkt zweier Strecken' spricht, so ist das eine gewaltsame Übertragung eines arithmetischen Ausdrucks auf die Geometrie .... Man wird nämlich finden, dafs der übliche Begriff

ansieht und diese Strecken als die Seiten des Rechtecks. Ein Produkt von drei Faktoren betrachtet man dann als den arithmetischen Ausdruck eines Parallelepipeds. Durch die einfache Vermehrung der Faktoren ist aber in der Arithmetik gar kein Schritt weiter gemacht worden und es ist daher nicht angemessen, bei der geometrischen Deutung von der Fläche zum Körper überzugehen. Auch würde es schwer sein, wenn man die Potenzbetrachtung zum Grunde legt und nur nach einer geometrischen Deutung für die Veränderung der Exponenten sucht, für a^0 und ferner für die Potenzen mit negativen Exponenten eine Analogie zu finden. Und doch sind diese Potenzen nicht weniger berechtigt, geometrisch gedeutet zu werden, als die Potenzen mit positiven Exponenten, wenn man von der Betrachtung der Potenzen ausgeht.

Dieser Ausgangspunkt der Vergleichung von arithmetischen und geometrischen Dimensionen ist nun von vornherein falsch gewählt. Die Vergleichung darf nicht erst bei der Betrachtung der Potenzen beginnen, sondern hat sich naturgemäfs an die drei Stufen der arithmetischen Rechenoperationen zu halten.

Der ersten Stufe des Rechnens, der Addition, entspricht die einfache Ausdehnung nach der Länge;

der zweiten Stufe, der Multiplikation, die zweifache Ausdehnung nach Länge und Breite;

der dritten Stufe, der Potenzierung, die dreifache Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe.

Das Resultat der Addition, die Summe, findet ihre geometrische Deutung in der Linie;

das Produkt in der Fläche;

die Potenz in dem Körper.

Während nun aus der Gleichheit der Summanden das Produkt, aus der Gleichheit der Faktoren die Potenz entsteht und sich auf diese Weise die drei Stufen der arithmetischen Operationen entwickeln, resultiert aus der Vermehrung der Exponenten und der Gleichsetzung von Basis und Exponenten

---

'Produkt' hierfür zu eng ist und dafs man entweder hier die Erweiterung eintreten lassen oder die Kronecker'schen Produkte benannter Zahlen zu Grunde legen mufs."

keine weitere Stufe des Rechnens. In Analogie hiermit kann man die Erzeugung geometrischer Gebilde durch Bewegung setzen. Entsprechend dem Stillstand der Rechnung bei der Potenzierung ergiebt sich nichts Neues durch die Bewegung des Körpers.

Mit der Aufstellung mehrdimensionaler Räume hat man also nicht arithmetische Ausdrücke geometrisch gedeutet, sondern wir würden umgekehrt nun die den mehrdimensionalen Räumen entsprechenden Rechenoperationen aufzusuchen haben.

Nach eingehenden Erörterungen über die Möglichkeit vierdimensionaler Geometrie (bes. mit Hilfe der Projektion auf unsern bekannten Raum) sagt Schlegel:

„Diese „Zukunftsgeometrie“ wird allerdings mangels jeder Anwendbarkeit auf Verhältnisse der Wirklichkeit niemals die Wichtigkeit und Bedeutung der Geometrie der Ebene und des Raumes erlangen und auch in ihrer Eigenschaft als formales Bildungsmittel unseren Schulen fernbleiben.“[1])

J. Rosanes, Über die neuesten Untersuchungen in betreff unserer Anschauung vom Raume.[2]) — Breslau 1871.

„Das Material[3]) der Geometrie ist der Raum, und die Frage nach dem Begriffe und Wesen desselben hat wohl zu allen Zeiten die Mathematiker beschäftigt, aber sie wurde mehr in Bezug auf die allgemeine Weltanschauung studiert; vereint mit den Philosophen, mit welchen sie in der Person groſsenteils zusammenfielen, suchten sie wohl eine Vorstellung hierüber zu gewinnen, aber die Geometrie als Wissenschaft galt kaum für abhängig von der jeweiligen Art derselben.“

„In neuerer Zeit ist man wohl überwiegend zu der von Helmholtz sogenannten empiristischen Theorie übergegangen, zu welcher sich schon frühzeitig Gauſs bekannt

[1]) Dies wird wohl von keiner Seite bestritten werden. Selbst bei einer diskursiven Behandlung des Raumproblems, wie sie vielleicht in Prima gelegentlich der Repetition der Anfangsgründe als möglich gedacht werden könnte, würde auf eine Erörterung der mehrdimensionalen Räume zu verzichten sein.

[2]) Vergl. die Besprechung in H. Z. III. p. 387.

[3]) Ich kann diesen Ausdruck für keinen besonders glücklichen halten.

haben soll, wonach man im Raume nichts als einen von der Empirie abstrahierten Begriff zu sehen habe, eine Ansicht, welche schon vor Kant insbesondere bei dem englischen Sensualisten Locke auftritt.

Auf diese Weise war aber die Frage nach dem Begriffe des Raumes und seinen ursprünglich aus unserer Anschauung entnommenen Eigentümlichkeiten mehr Gegenstand der auf das Wesen unserer Gesamt-Erkenntnis gerichteten Spekulation, keineswegs aber als von Einflufs auf die Gewifsheit der Geometrie angesehen.“

Alsdann führt Rosanes Riemanns Arbeit an und ihre wesentlichen Resultate, wobei folgende Bemerkungen nicht ohne Bedeutung erscheinen:

„Doch darf . . . die Ausdrucksweise ‘mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit’ nicht verleiten, bei dem allgemeinen Begriffe immer an Gegenstände der Anschauung zu denken; vielmehr ist die äufserste Abstraktion von der letzteren die Hauptsache bei der allgemeinen Untersuchung.“

„Überhaupt repräsentiert jede beliebige Linie eine einfach, jede beliebige Fläche eine zweifach, der Raum eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.“

„Das Element, bei Anwendung auf Raumgröfsen der Punkt, ist jedesmal durch so viele Bestimmungen (Zahlengröfsen) definiert, wie die Vielfachheit der Mannigfaltigkeit beträgt.“[1]

---

[1]) Meiner Ansicht nach darf der Punkt nicht schlechtweg als das Element der Raumgröfsen bezeichnet werden, sondern die Eigenschaft, ein Element zu sein, kommt ihm nur in ganz bestimmtem Sinne zu — nämlich wenn man die Gebilde des Raumes durch Bewegung erzeugt denkt. Im übrigen mufs scharf unterschieden werden zwischen den Elementen der verschiedenen Gebilde sowohl, wie des Raumes selbst und dem Punkt. Das Element der Linie ist ein Differential derselben, aber schon im Besitz aller wesentlichen Eigenschaften derselben; ebenso ist das Flächenelement und Körperelement in exakter Weise zu definiren. Das letztere ist zugleich das Raumelement. Durch die Integration zwischen den Grenzen unendlich — wenn es gestattet ist, diesen Ausdruck der Kürze halber zu gebrauchen — erhalten wir aus diesem Element den Raum selbst, durch die Integration zwischen bestimmten Grenzen einen Körper. Niemals aber ergiebt sich aus der Integration eines Flächen- oder Linienelementes etwas anderes als eine Fläche oder Linie, geschweige denn aus dem Element „Punkt“. Man vergleiche Kapitel III.

„Unser Raum repräsentiert sich nun als eine solche dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche in jedem Punkte dasselbe konstante Krümmungsmafs besitzt.[1]) Dies ist der analytische Ausdruck für die Unabhängigkeit der Körper vom Orte."

Rosanes geht noch auf den Unterschied zwischen Unbegrenztheit und Unendlichkeit, auf den Riemann zuerst hingewiesen, ein und zitiert dann auch Helmholtzs Arbeit. Die Schrift schliefst mit den Worten:

„So mufste auch, damit das richtige Verständnis der Raumanschauung gewonnen werde, erst die Einführung und Untersuchung eines umfassenderen Begriffes vorangehen."

Donadt, Das mathematische Raumproblem und die mathematischen Axiome. — Leipzig 1881.

Der Raum kann von vier Gesichtspunkten aus betrachtet werden; es sind der logische, der mathematische, der psychologische und erkenntnistheoretische.

„Zwar läfst sich nicht leugnen, dafs alle vier Probleme, welche die Raumvorstellung anregt, in innigem Zusammenhange mit einander stehen, so namentlich auf der einen Seite das logische und mathematische, auf der andern Seite das psychologische und erkenntnistheoretische Problem, allein ihr qualitativer Unterschied ist sehr zu betonen."[2])

---

[1]) Der Bemerkung, dafs dieses Krümmungsmafs der Null gleich ist, wenn es sich um den Euklidischen Raum handelt (d. h. mit andern Worten um die Giltigkeit der Euklideischen Axiome, bes. des 11.), fügt Rosanes folgende Bemerkung hinzu:

„Über die Richtigkeit derselben (nämlich der Annahme, dafs die Konstante Null ist) ist aber darum volle Gewifsheit nicht zu erlangen, weil ihre Prüfung nicht durch die Theorie, sondern durch die Erfahrung geschehen mufs. Eine solche Prüfung kann immer nur annähernde Genauigkeit bieten."

[2]) Mit der scharfen Unterscheidung dieser Gesichtspunkte, der Feststellung, inwiefern durch sie die Untersuchung des Raumproblems beeinflufst wird, der Aufsuchung, worin sie zusammentreffen, und der genauen Bestimmung, worin sie sich unterscheiden, ist zur Lösung der Frage der wesentliche Anhalt gegeben. Es ist daher diese Zerlegung der Hauptfrage vom gröfsten Werte.

Bei der Besprechung der gegen Euklid erhobenen Angriffe heifst es: „Ist die geometrische Wissenschaft die Einzelwissenschaft vom Raume, so müssen ihre Fundamente die wesentlichen Prädikate bestimmen, die den Inhalt unserer Raumvorstellung bilden.“

„Die Grundsätze der Geometrie müssen die Grundeigenschaften des Raumes aussagen, wie sie unserer ursprünglichen Vorstellung mitgegeben sind.“

Es wird nachgewiesen, dafs dies bei Euklid nicht der Fall, dafs er auf der einen Seite zuviel, auf der andern zuwenig gebracht, z. B. die Ausgedehntheit nach drei Dimensionen übergangen und später stillschweigend gebraucht habe.

Donadt geht alsdann ausführlich auf die Bedeutung des 11. Axioms ein, bespricht die Nicht-Euklidische Geometrie und die Arbeiten von Riemann und Helmholtz, wobei er besonders die Untersuchungen von Helmholtz über die Kongruenzbedingungen unserer Geometrie, denen wir bei Besprechung des Begriffes Kongruenz unsere besondere Beachtung zu schenken haben, hervorhebt und auf das von uns auch zitierte Werk von Erdmann hinweist.

Als wesentlich für die Untersuchung wird alsdann angegeben, dafs festgestellt werden müsse, ob der Raum ein Begriff sei. Nach der kritischen Prüfung der Ansichten Kants und verschiedener anderen, besonders Wundts,[1]) kommt Donadt zu dem Resultat: „Der Raum ist ein Begriff, weil er selbständiges Objekt des logischen Denkens sein kann“, indem er hinzufügt: „Denn es ist ein Hauptmerkmal des logischen Denkens, dafs es begriffliches Denken ist.“[2])

Den Unterschied zwischen dem logischen (mathematischen) und erkenntnistheoretischen (metaphysischen) Raum giebt Donadt in einem Zitat Baumanns aus dessen Werk, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Phiolosophie: „Der Raum in mathematischer Hinsicht rein als Vorstellung unseres Geistes gefafst stellt sich, wenn er mit dem Raum

---

[1]) Vergl. Wundt, Logik und System der Philosophie.

[2]) Es sei nicht unerwähnt, dafs diese Betrachtungen uns belehren, dafs das, was Kant mit reiner Anschauung bezeichnet, keine Anschauung, sondern Begriff ist.

draufsen verglichen, bald als ein Wesen sui generis heraus; in ihm ist Allgemeines und Besonderes mit einem Schlage gegeben, wir entwerfen ihn zugleich im Bilde und finden ihn in uns selbst entworfen, wir durcheilen ihn und verfügen über ihn ohne Hindernis; ganz anders finden wir es bei dem Raume, der aufser uns sich uns empfindbar macht; der Schlufs von einem auf den andern ist so durch die Sache selbst verboten."

Donadt setzt dann weiter auseinander, dafs unser Raum nicht unter den Begriff der *n*fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit als allgemeinen Gattungsbegriffes falle. Bemerkenswert ist hierbei folgende Stelle:

„Man könnte aber zweitens einwenden, dafs der allgemeine Gattungsbegriff, dem der Raum subsumiert werden soll, überhaupt gar nicht aus der einen Raumanschauung entstanden ist, sondern vielmehr aus der Betrachtung der Flächen."

Die bekannte Ausführung Helmholtz', die sich auf die Annahme zweidimensionaler Wesen stützt, wird sehr treffend folgendermafsen berichtigt:

„es wird nicht die Anschauung jener Wesen dargestellt, sondern die Anschauung, welche wir mit unserer Raumvorstellung von den geometrischen Eigenschaften jener Flächen haben, wenn wir dabei von den übrigen Merkmalen abstrahieren."[1])

„Von einem Verhältnis der Gattung zur Art kann demnach zwischen der *n*-dimensionalen Mannigfaltigkeit und dem Raume nicht die Rede sein: die *n*-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist kein Gattungsbegriff, sondern nur ein mathematischer Hilfsbegriff."

Da nach Wundt die Subsumtion das Wesen des Begriffs einengt, so giebt es Begriffe ohne Unterordnung unter einen Gattungsbegriff.

„Und fürwahr folgt aus dem unanfechtbaren Beweise Kants, dafs die Raumanschauung einzig in ihrer Art ist, dafs für den Raumbegriff ein Gattungsbegriff im eigentlichen Sinne gar nicht existiert und überhaupt nicht existieren kann."

In der analytischen Behandlung des Krümmungsmafses

---

[1]) Man vergl. meine Ausführungen bei dem Zitat aus Helmholtz und Wundt, Logik.

macht dann Donadt aufmerksam auf den Unterschied zwischen dem Krümmungsmafs von Gaufs und dem von Riemann, einen Unterschied, „den manche Geometer gar nicht zu kennen scheinen". Zugleich wird das Krümmungsmafs als Einteilungsprinzip für die *n*-fachen Mannigfaltigkeiten zurückgewiesen. Dieser Teil der vorliegenden Arbeit schliefst mit einer Prüfung der Riemann-Helmholtzschen Arbeiten auf ihren mathematischen Wert, der sich eine Betrachtung anreiht über das 11. Axiom.

Das Facit der Untersuchungen ergiebt sich aus folgenden Sätzen:

„Soll eine Definition des Raumes gegeben werden, so mufs dabei zunächst die logische Forderung erfüllt sein, dafs in diese Definition Nichts eingeführt wird, was uns erst durch den zu definierenden Begriff gegeben ist oder ihn voraussetzt. Bei einer Definition des Raumes „werden daher nur solche Begriffe benutzbar sein, die aufser für den Raum auch für andere von ihm unabhängige Fundamentalformen des Erkennens erforderlich sind". (Wundt.) Es darf in der Definition keine ursprüngliche Raumanschauung übergangen werden, die später stillschweigend angenommen wird, und nichts in ihr aufgestellt werden, was keine Grundanschauung des Raumes ausdrückt."

„Der Raum steht in Beziehung zu den Begriffen:

1) Gröfse; 2) Richtung; 3) Stetigkeit; 4) Veränderung; 5) Zahl (da diese zum Messen aller Gröfsen dient).

Grassmanns Definition:

„Der Raum ist ein System dritter Stufe."

Wundts Definition:

„Der Raum ist eine unendliche stetige Gröfse, in der jedes Element durch drei unabhängig von einander veränderliche Richtungen bestimmt ist."

Hierzu treten folgende Fundamentaldefinitionen:

„Das Element des Raumes heifst Punkt."[1])

„Die Bestimmung des Punktes durch drei Richtungen heifst seine Lage."

---

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen zu dem Zitat von Rosanes.

„Der Raum ist an allen Orten und nach allen Richtungen gleich beschaffen, d. h. an allen Orten und nach allen Richtungen können gleiche Konstruktionen vollzogen werden."

Sehr wichtig ist folgende Stelle: „Thatsächlich ist klar, daſs eine Definition des Raumes nicht möglich ist, ohne daſs man den Begriff der Geraden und des Punktes verwendet."[1])

Schlieſslich giebt Donadt folgende Definition des Raumes:

„1) Der Raum ist eine unendliche stetige Gröſse, in der jedes Element durch drei unabhängig von einander veränderliche Richtungen bestimmt wird.

2) Im Raume lassen sich an allen Orten und nach allen Richtungen Konstruktionen vollziehen (Bedingungen für die Gleichheit zweier Konstruktionen).

3) Zu jeder Richtung im Raume existiert eine entgegengesetzte Richtung von übereinstimmender Lage.[2])

Hierzu treten die folgenden Fundamentaldefinitionen: ad 1) Jedes Element des Raumes heiſst Punkt;[3]) die Bestimmung des Punktes durch die Richtungen heiſst seine Lage.

ad 2) und 3) Die Konstruktion, welche zwei entgegengesetzte Richtungen von übereinstimmender Lage zusammenfaſst, heiſst Gerade. Die Konstruktion, welche zwei verschiedene Richtungen von übereinstimmender Lage zusammenfaſst, heiſst Winkel."[4])

Die weiteren Ausführungen werden noch bei der Behandlung des Begriffs Axiom Berücksichtigung finden.

---

[1]) Nicht den Begriff der Geraden, sondern den Begriff der Richtung! Ferner ist zu bedenken der Zwiespalt in der Darlegung: Raum a priori, von da aus über Körper etc. zum Punkt — und nun der Raum nicht ohne Punkt definierbar!!

[2]) Was soll der Zusatz „von übereinstimmender Lage"? siehe weiter unten.

[3]) Das Raumelement ist vom Punkt sehr scharf zu unterscheiden! sonst wären Linien, Flächen, Körperelemente alle identisch. — Vergl. Zitat aus Rosanes.

[4]) Aus dieser Stelle geht hervor, daſs Donadt unter übereinstimmender Lage versteht, daſs die beiden Richtungen einen Punkt gemeinsam haben, resp. von ein und demselben Punkt ausgehen. Es wäre wohl klarer gewesen, statt „von übereinstimmender Lage" zu sagen „mit gemeinsamem Ausgangspunkt".

J. C. Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Math. und Philosophie. — Zürich 1870.[1])

In der ersten derselben, betitelt: Kants und Gaussens Ansicht über die Natur des Raumes, stellt sich Becker vollständig auf Kants Standpunkt und weist Gaussens und Trendelenburgs Einwürfe zurück. Die zweite: Die Axiome der Geometrie, beschäftigt sich mit Riemanns Arbeit über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Dabei ergiebt sich als Konsequenz der in Abhandlung I aufgestellten Ansichten eine Zurückweisung der Riemannschen Raumlehre. Es heifst dann:

„Diese Arbeit (Riemanns Abhandlung) erinnert sehr an eine jugendliche Verirrung Kants, nämlich an dessen Versuch, die Thatsache zu erklären, dafs der Raum nur drei Dimensionen habe. 'Warum der Raum nur drei Dimensionen habe' gehört ebenso wie die Frage, 'warum zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können', und die übrigen, welche Riemann sich stellen mufste, ehe er die Euklidischen Axiome für Hypothesen erklärte, und zwar für unbegreifliche, in das Gebiet derjenigen Fragen, von denen Kant sagt, dafs man, ehe man sie zu beantworten suche, sich zuerst fragen müsse, ob man sie vernünftiger Weise auch stellen dürfe .... — Und sicher hat ihn die erwähnte eigene jugendliche Verirrung zu der Äufserung geführt: 'Es ist schon ein grofser und nötiger Beweis der Klugheit und Einsicht, zu wissen, was man vernünftiger Weise fragen solle.'"

„Sobald wir eine Vorstellung vom Raume haben, erkennen wir ihn sofort als einen von drei Dimensionen und mit einer Gewifsheit, die nur unmittelbare Anschauung geben kann. Hat die Frage, warum hat der Raum gerade drei Dimensionen? den Sinn: woher schöpfe ich dieses Urteil? d. h. was ist sein Erkenntnisgrund? so lautet die Antwort: die Anschauung überzeugt mich davon. Will ich aber die Thatsache selbst ergründen, d. h. frage ich nach einem Realgrunde, aus dem

[1]) Die hierher gehörige Abhandlung 3 ausführlich besprochen von Sextus Empiricus in Hoffmanns Zeitschrift, Band III. p. 465—473 (Abhandlung 1 in H. Z. III. p. 274—281; No. 2 in H. Z. III. p.380—388; No. 4 in H. Z. III p. 539—541). Ferner besprochen in Schl. Z. XV. p. 93.

sich diese Eigenschaft als notwendige Konsequenz ergäbe, so frage ich etwas Unvernünftiges.“

Becker kommt zu dem Schlufs, dafs Riemann infolge falscher Fragestellung und unter Verkennung der a priori vorhandenen Erkenntnisse auf Abwege geraten sei, und stellt auch hier wieder die Ansicht Kants als die allein richtige hin. Die dritte Abhandlung handelt: „Über die Grundbegriffe der Geometrie und die Bewegung als Hilfsmittel bei geometrischen Untersuchungen.“

---

v. Forstner, Grundrifs etc. — Berlin 1826.

„Die unendliche Ausdehnung, welche bleibt, wenn wir uns in der Vorstellung die ganze uns umgebende Körperwelt als vernichtet denken, heifst Raum.“

„Der Raum ist eine stetige Gröfse und hat nichts weiter als Ausdehnung.“

„Den Begriff vom Raume erhalten wir nicht erst durch die Erklärung der Geometrie vom Raume, sondern haben ihn bereits in uns; die Geometrie erklärt nur, was sie unter Raum verstanden wissen will. — Die Anzahl der Ausdehnungen im Raume, in Hinsicht ihrer verschiedenen Richtungen, ist unendlich; wir nehmen aber aus dieser unendlichen Menge von Ausdehnungen drei heraus, welche wir vorzugsweise bei den Körpern betrachten, die wir aber für jeden besonderen Körper wieder durch Entlehnungen suchen müssen.“

Helmholtz, Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. — Göttinger Nachrichten 1868.[1])

[1]) Vergl. Riemann, Die Hypothesen etc. Göttinger Abhandlungen 1867. — Vergl. Helmholtz, Pop. wiss. Vorles. III. 2: „Über den Ursprung etc.“ p. 36: „Den analytischen Weg hat zuerst . . . B. Riemann in Göttingen eingeschlagen (s. vor. Notiz). Dieser Weg hat den eigentümlichen Vorzug, dafs alle Operationen, die in ihm vorkommen, reine rechnende Gröfsenbestimmungen sind, wobei die Gefahr, dafs sich gewohnte Anschauungsthatsachen als Denknotwendigkeiten unterschieben könnten, ganz wegfällt.“

Ferner Krause, Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der geometrischen Axiome; bespr. in Schl. Z. XXIV. p. 34.

p. 194: „Die analytische Behandlung der Frage, wodurch sich der Raum unterscheide von anderen abmeſsbaren, mehrfach ausgedehnten und kontinuierlichen Gröſsen, empfiehlt sich in diesem Falle gerade durch den Umstand, daſs sie der Anschaulichkeit ermangelt, und deshalb den auf diesem Gebiete so schwer zu vermeidenden Täuschungen durch die besondere Begrenztheit unserer Anschauungen nicht ausgesetzt ist.“

Die ferneren Ausführungen Helmholtzs werden bei Besprechung der Begriffe Kongruenz und Bewegung noch ganz besondere Berücksichtigung finden; es seien hier nur noch die Resultate angegeben:

p. 197: „I. Der Raum von n Dimensionen ist eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.“[1])

p. 198: „II. Es wird die Existenz von beweglichen aber in sich festen Körpern,[2]) bezieblich Punktsystemen, vorausgesetzt.“

p. 200: „III. Es wird vollkommen freie Beweglichkeit der festen Körper vorausgesetzt.“

p. 201: „IV. Endlich müssen wir dem Raume noch eine Eigenschaft beilegen, die der Monodromie der Funktionen einer komplexen Gröſse analog ist, und die sich darin ausspricht, daſs zwei kongruente Körper auch noch kongruent sind, nachdem der eine eine Umdrehung um irgend eine Rotationsaxe erlitten hat.“

p. 219: „Wenn unsere Annahmen I bis IV erfüllt sind, so ist das allgemeinste System der Geometrie das, was sich nach den Regeln unserer gewöhnlichen analytischen Geometrie ergeben würde, wenn man diese anwendete auf ein kugelähnliches Gebilde von drei Dimensionen, dessen Gleichung in vier rechtwinkligen Koordinaten X, Y, Z, S ausgedrückt wäre:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + (S + R)^2 = R^2.$$

Hierin können X, Y, Z nicht unendlich werden, wenn nicht $R = \infty$. Letzterer spezieller Fall entspricht unserer wirklichen Geometrie gemäſs den Axiomen des Euklides. Es können X, Y, Z dann endliche Werte nur haben, wenn $S = 0$,

---

[1]) Oder eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen. Beide Ausdrücke rühren von Riemann her.

[2]) Wir haben jetzt dafür den Ausdruck „starre Körper“.

was die Gleichung eines ebenen Gebildes ist. In diesem Sinne müssen wir den Raum des Euklides den Räumen von ersterer Anzahl der Dimensionen gegenüber, mit Riemann als ebenen Raum bezeichnen."

p. 221: „V. Der Raum hat drei Dimensionen."[1])

p. 221: „VI. Der Raum ist unendlich ausgedehnt."

„Diese sechs Postulate geben die genügende Grundlage zur Entwicklung der Raumlehre ab."

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878.[2])

„Die Einsicht in die Fehler des Herbart'schen Versuchs verbunden mit dem Bestreben, eine philosophische Grundlage für mehrere fremd nebeneinanderstehende Stammbegriffe der mathematischen Wissenschaften zu finden, führten Riemann zu den Untersuchungen, welche zu einer algebraischen Raumtheorie sich entwickelten; einem Schema, innerhalb dessen unser Weltraum eine Stelle finden sollte."

„Es wird sich zeigen, dafs in diesen (Riemanns) metamathematischen Raumtheorieen Herbarts logische Erschleichung mit analytischen Zeichen wiederholt wurde; dafs hierdurch aber bei dem unbeschränkten analytischen Schematismus ein *n*-facher Raum entstehen mufste, während Herbart bei dem dreifachen stehen blieb, weil er nur Begriffe verwandte, die logisch waren, obschon deren Richtigkeit aus Herbarts Deduktion nicht zu folgern ist. Jener *n*-fache Raum wurde nicht als eine Erschleichung erkannt, weil man über die logische Natur der analytischen Symbolik im Unklaren war, und sie nur empirisch je nach den vorliegenden Bedürfnissen handhabte."

Verfasser kommt dann auf die Pangeometrie zu sprechen, die er als verfehlt nachweist, weil die inhaltsschwere Vorfrage

---

[1]) NB. etwas abgeändert.

[2]) Man vergleiche zu den folgenden Ausführungen die Zitate aus J. C. Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete von Mathematik und Philosophie. Ferner: Schmitz-Dumont, Die Bedeutung der Pangeometrie; besprochen in Schl. Z. XXIII. p. 84.

nicht beachtet worden sei, ob die Formeln in jeder Hinsicht eindeutig blieben.

„Sei eine Prämisse noch so phantastisch oder gar in sich widerspruchsvoll, sobald sie zum elementaren Bausteine gestempelt wird, kann man in logischem Fortschritte aus dergleichen Elementen Gebilde zusammenfügen; aber diese Gebilde vertragen ebensowenig eine logische Deutung wie die Elementarprämisse.“[1])

„Riemann unternahm es die Phantasiegebilde der Pangeometrie mit den anschaulichen Gebilden der gemeinen Geometrie in logischen Konnex zu bringen, oder wenigstens die Möglichkeit ihrer anschaulichen Konstruktion glaubhaft zu machen.“

„Was Riemann nun thatsächlich fertig brachte, oder andere in seinem Sinne, war die anschauliche Konstruktion der Verbindungsart verschiedener pangeometrischen Gebilde, aber nicht die Gebilde selbst.“

„Die Vorstellung ist allerdings aufgefordert, sich dies, nämlich ein Übergehen in völlig verschiedenen Arten der Bestimmungsweise einer Ausdehnung, durch Übergehen des Punktes zur Linie, Fläche, Körper annehmbar erscheinen zu lassen; aber beim Körper sagt die Vorstellung plötzlich halt.“

„Wird die Verbindung der Begriffe Gröfse und Richtung geleugnet, die Abstraktion erlaubt ganz davon abzusehen, nun dann entstehen Formeln, welche in der Arithmetik ihre eindeutige Geltung besitzen, aber angewendet auf ein Nebeneinander sinnlos sind; und diese Sinnlosigkeit wird nicht vernünftig dadurch, dafs man sie mit dem Worte '*n*-fache Mannigfaltigkeit' bezeichnet.“

„Statt dessen wurde die kühne Hypothese gesetzt: jene analytischen Formeln dürften auf den Begriff eines Raumes überhaupt gedeutet werden.“

„Je dunkler der Begriff einer *n*-fachen Mannigfaltigkeit war, desto vielversprechender erschien er der Spekulation. . .“

Es wird dann auseinander gesetzt, welche Gründe es er-

[1]) Es wird also der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht nur die Anschaulichkeit resp. die Vorstellbarkeit abgesprochen, sondern sogar jede Möglichkeit einer logischen Deutung.

möglichten, den irrigen Satz aufzustellen, „daſs der Raum der Geometrie ebenso wie derjenige der Physik und Astronomie zunächst eine Vorstellung sei von demselben Bewuſstseinsgehalt wie jede beliebige andere Vorstellung", und hauptsächlich angeführt der Mangel an richtigen Definitionen für Vorstellung, Anschauung und Begriff und auch für Dimension.

Mit diesen Zitaten möge die Besprechung der Raumbegriffe resp. der Eigenschaften des Raumes ihren Abschluſs finden. Naturgemäſs lieſs sich die Betrachtung des Raumes von derjenigen der Körper etc. nicht immer hinreichend trennen, und so werden wir im III. Kapitel, das von den räumlichen Gebilden handelt, noch wiederholt auf das Raumproblem zurückgreifen müssen. Entgegen der ursprünglichen Absicht sind auch eine Reihe von Zitaten hinzugekommen, die den modernen Ansichten über das Raumproblem Ausdruck verleihen.[1]) Es schien mir aber der Vollständigkeit halber notwendig, wenigstens einigermaſsen dem etwaigen Verlangen des Lesers entgegenzukommen, das Wichtigste über diese Arbeiten kennen zu lernen, ohne die Originalarbeiten selbst studieren zu müssen. Vielleicht wird auch der eine oder andere Leser durch die mitgeteilten Proben sich veranlaſst fühlen, diesen Fragen nachzugehen; freilich wird der, welcher sich eingehender mit den angeregten Fragen beschäftigen will, sich höchstens durch den Litteraturnachweis befriedigt fühlen: doch erlaube ich mir, auch hier noch einmal ausdrücklich auf das III. Kapitel zu verweisen, das über manche wesentliche Punkte sich ausführlicher verbreitet.

Funcke, Grundlagen der Raumwissenschaft, Hannover 1875, bespr. in H. Z. IX. p. 23—28 (280/83; 363/66; 430/31).

Beltrami, Nicht-Euklidische Geometrie, 1868 (Giornale di Matematiche), bespr. in H. Z. II. p. 130—132.

---

[1]) Es liegt ja in der That dem eigentlichen Zwecke des vorliegenden Werkes ziemlich fern, auf das Raumproblem intensiver einzugehen. Man vergleiche übrigens noch H. Z. VII. p. 250—253 den Bericht Hoffmanns über Hoppes Vortrag: „Über den Raumbegriff" und H. Z. VIII p. 406—410.

Fresenius, Die Raumlehre, eine Grammatik der Natur, Frankfurt a/M, 1875, bespr. in H. Z. VII. p. 64—67.
Frischauf, Elemente der absoluten Geometrie, Leipzig 1876, bespr. in H. Z. VII. p. 464—473, in Schlöm. Ztschr. XVIII p. 69.
Gilles, Bedenkliche Richtungen in der Mathematik, in H. Z. XI. p. 5—24 (274—281; 435/36).
Emsmann, Zum vieraxigen Koordinatensysteme, in H. Z. XI. p. 253—261 (XII. p. 40).
Schlegel, Der vierdimensionale Raum, in H. Z. XIV. p. 87—89.
Killing, Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885, bespr. in H. Z. XVII. p. 209—211.
Beez, Zur Theorie des Krümmungsmafses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Schlöm. Ztschr. XX. p. 423; XXI p. 373.
Beez, Über das Riemann'sche Krümmungsmafs höherer Mannigfaltigkeiten. Schlöm. Ztschr. XXIV. p. 1, 65.
Beez, Über conforme Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, Schlöm. Ztschr. XX. 253.
Becker, J. C., Über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume, Schlöm. Ztschr. XVII. p. 314.
Becker J. C., Die Grundlagen der Geometrie, Schlöm. Ztschr. XX. p. 445.

Verzeichnis von Programmabhandlungen.

Alth, Über das absolute Mafssystem und die Theorie der Dimensionen. Wien 1884.
Ballauf, Über die mathematischen Definitionen und Axiome. Varel 1879.
Endert, Die logischen Prinzipien der Mathematik. Detmold 1879.
Vogt, Der Grenzbegriff in der Elementarmathematik. Breslau 1885.
Hoffmann, Die Geometrie in ihrer Abhängigkeit von den Mafsverhältnissen des Raumes. Graz 1881.
Killing, Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie. Brilon 1880.
Meifsner, Leibniz' Streit mit Clarke über den Raum. Pillau 1881.
Krause, Kants Erkenntnislehre als Grundlage unserer Erkenntnis. Marienwerder 1881/82.
Franke, Untersuchungen über den Raum und sein Verhältnis zu den Dingen. Hirschberg 1885.
Jahn, die Subjektivität des Raumes und die Axiome der Geometrie. Dramburg 1884.

II. Kapitel.

Die Geometrie.

Nachdem so der Raum, das Gebiet (Feld, Sphäre) der Geometrie, festgelegt ist, möge nun eine Vergleichung der Ansichten erfolgen über den Begriff der Geometrie selbst, an die sich eine Besprechung der geometrischen Raumgebilde, des Gegenstandes der Geometrie, anschliefsen wird.

Es soll gleich an dieser Stelle auf die Verschiedenheit der Herleitung der räumlichen Gebilde hingewiesen werden und eine Entscheidung darüber getroffen werden, welcher Weg vorzuziehen sei, vom Körper über Fläche, Linie zum Punkt oder umgekehrt.[1]) Verfasser schickt voraus, dafs er durchaus für den ersteren Weg eintritt.[2]) Es scheint sich hier eine historische Folge geltend zu machen: während wir in früheren Zeiten die Lehrbücher der Geometrie ihren Ausgang vom Punkt nehmen sehen, diesem abstraktesten Raumgebilde, findet man in den Lehrbüchern der letzten Jahrzehnte mit wenigen, verschwindenden Ausnahmen den naturgemäfseren Weg ein-

---

[1]) Vergl. zu dem Folgenden: Bartholomäi a. a. O. p. 1,

„Die Anfänge der Mathematik können auf mehrfache Weise gefafst werden. Erstens nämlich kann man untersuchen, wie die Mathematik nach und nach entstand, aus welchen ersten Sätzen sie sich entwickelte, unter welchen Bedingungen diese gefunden wurden. Zweitens kann man fragen, wie die Mathematik anfange und anfangen müsse, dafern sie schnell, sicher und dem Wesen der Wissenschaft gemäfs gelernt werden soll. Drittens kann man sich in den reinen Gedanken versetzen und untersuchen, wie die Mathematik dem Begriffe nach anfangen müsse. Wir bekommen also dreierlei Anfänge: den historischen, den pädagogischen und den philosophischen. — Wer den einen sucht, kann die anderen nicht ignorieren, und die philosophische Betrachtung zumal mischt sich überall von selbst ein.“

[2]) Was den Unterricht betrifft; im Verlaufe der geklärten Auffassung kann dann daneben auch der zweite Weg eingeschlagen werden und wird gewifs nicht ohne Erfolg zur Hebung des Verständnisses herangezogen. Nur ist zu bedenken, dafs wir bei der zweiten Betrachtungsweise ein mechanisches Prinzip, dasjenige der Bewegung (vergl. weiter unten den Abschnitt über „Bewegung“), in die rein geometrischen Betrachtungen einmischen. — Vergl. Kapitel III.

geschlagen, vielleicht eine Folge der Bestrebungen, die Raumlehre in der Volksschule einzuführen resp. eine Folge des propädeutischen Unterrichts auf den höheren Schulen.[1]) Es ist einleuchtend, dafs die Fläche ursprünglich nur als Grenze des Körpers, die Linie als Grenze der Fläche, der Punkt als Grenze der Linie aufgefafst worden ist und dafs erst im Laufe der Entwicklung des geometrischen Denkens die Gebilde Fläche, Linie, Punkt als selbständige Elemente oder Raumgebilde angesehen wurden. Es ist schon ein höherer Standpunkt, ein Ergebnis geometrischer Bildung, dafs wir diese Elemente losgelöst vom geometrischen Körper an und für sich betrachten. Es wird sich aus den weiter unten anzuführenden Zitaten ergeben, dafs die Überzeugung von der Ursprünglichkeit der Vorstellungen von Flächen, Linien, Punkten als Grenzen sich immer mehr Anhänger erworben und dafs dieselbe wohl jetzt als allgemein gültig bezeichnet werden darf. Es scheint auch kein Grund etwa methodischen Charakters vorzuliegen, vom naturgemäfsen Wege abzuweichen, da, wie schon erwähnt, der Punkt das abstrakteste Raumgebilde ist und sicher für den Schüler das schwierigste; ich glaube kaum, dafs ein eben in die Geometrie eintretender Kopf eine wirklich sichere Vorstellung des mathematischen Punktes haben wird, gerade hierbei wird immer an Stelle des abstrakten Begriffs ein physisches Substrat treten.[2])

---

[1]) Vielleicht aber auch eine Folge der philosophischen Vertiefung der Grundbegriffe.

[2]) Vergl. H. Z. I. p. 235; J. Kober, Über die Definition der geometrischen Grundbegriffe: „Oder man geht umgekehrt vom Punkte aus (der nicht definiert wird) . . . .“

„Es versteht sich, dafs der Schüler gewarnt werden mufs, den Punkt mit kleinen Raum- oder Flächenteilen u. s. w. zu verwechseln, sowie den Raum als notwendig erfüllt zu betrachten.“

Ferner H. Z. II. p. 42; Ciala, Zu dem Aufsatze von J. Kober: „Es kommt mir vor Allem darauf an zu betonen, dafs die Geometrie nichts anderes ist als eine bestimmte Art und Weise, die Dinge der Natur zu betrachten.“

„ . . . . Die Betrachtung der Gegenstände in Beziehung auf ihre Gröfse, ihre Gestalt hat sich zu der Wissenschaft ausgebildet, welche Geometrie heifst und die ich demnach als einen Zweig der Naturwissenschaft ansehe.“

Bei den Zitaten über den Begriff der Geometrie sollen nur die von der gewöhnlichen Form abweichenden gegeben werden.[1])

J. K. Becker, Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. — Berlin 1877.

Die Aufgabe der Geometrie besteht in der Beschreibung und Vergleichung der möglichen räumlichen Vorstellungen und der Erklärung ihrer Eigenschaften auf Grundlage der uns unmittelbar bekannten Eigenschaften des Raumes selbst und der daraus folgenden Gestaltungsgesetze.

J. K. Becker, Lehrbuch der Elemente der Geometrie. — Berlin 1877.

Die Geometrie lehrt uns die Dinge nach ihren räumlichen Eigenschaften unter einander vergleichen. Dazu gehören die Eigenschaften der Form oder Gestalt, der Gröfse und der Lage.[2])

Brewer, Lehrbuch der Geometrie. — 1822.

Die Geometrie ist die Wissenschaft von der Ausmessung des Raumes.

Ebensperger, Leitfaden der Geometrie. — Nürnberg 1850.

Die Wissenschaft, welche sich mit den Begriffen, der Darstellung und Vergleichung der stetigen Gröfsen (d. h. Linien, Winkel, Flächen und Körper) beschäftigt und die Wahrheit

[1]) Hier wird als gewöhnliche Definition vorausgesetzt: Die Geometrie ist die Lehre von den Raumgröfsen. — Wie ich über diesen Ausdruck denke, habe ich am Anfang des ersten Kapitels ausgeführt; übrigens verweise ich auf die von mir dort gegebene Antwort auf die Frage, was ist Geometrie.

[2]) Es wird sich empfehlen im Unterricht auf den Unterschied von Gröfse und Gestalt näher einzugehen, und ganz besonders zu betonen, dafs diese beiden räumlichen Eigenschaften vollständig unabhängig von einander sind. Auch ergiebt sich ungezwungen an dieser Stelle schon ein Hinweis auf Gleichheit und Ähnlichkeit.

der gefundenen Sätze durch sichere und überzeugende Schlüsse beweiset, heifst Geometrie.

F. Fischer, Anfangsgründe der Mathematik. — Leipzig 1887.

Es ist die Aufgabe der Geometrie, die Eigenschaften der Figuren zu ermitteln, welche sich aus ihren Gröfsenbeziehungen ergeben, vor allem aber ihre Gröfse zu bestimmen, oder sie zu messen. — (Die Figur wird definiert als die bildliche Darstellung irgend eines Gebildes, das aus den bekannten Raumgröfsen zusammengesetzt ist oder selbst ein solches ist.)

Gilles, Lehrb. der ebenen Geometrie. — Heidelberg 1887.

Die Geometrie ist die Lehre von der Raumgröfse, welche durch stetige Bewegung in der reinen Anschauung entsteht, indem man mit geschlossenen Augen, überhaupt unabhängig von der Aufsenwelt die Raumgebilde konstruieren kann.

Legendre, Die Elemente der Geometrie (ed. Crelle). — Berlin 1844.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft, welche das Mafs der Ausdehnung zum Gegenstande hat.

Joh. Müller, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Bremen 1870.

Die Aufgabe der Geometrie ist die wissenschaftliche Betrachtung der Raumgebilde.

Schindler, Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

Wissenschaft heifst das Wissen der Beziehungen zwischen den gleichartigen Gröfsen. Diese Beziehungen sind am einfachsten bestimmbar, wenn sämtliche Verschiedenheiten durch eine gemeinsame Einheit bestimmt werden können.

Geometrie heifst die Grund-Wissenschaft von den mefsbaren ausgedehnten oder Raumgröfsen.

Seeger, Elemente der Geometrie. — Wismar 1887.

Alles Arbeiten auf dem Gebiete der Geometrie verfolgt einen der beiden nachstehenden Zwecke:

Entweder untersucht man, wenn gewisse Beziehungen zwischen den Bestandteilen eines geometrischen Gebildes gegeben sind, welche anderen Beziehungen — als unzertrennlich mit jenen verknüpft — dann ebenfalls stattfinden müssen, und sammelt die Resultate dieser Untersuchung in einzelnen geometrischen Sätzen (Lehrsätzen, Theoremen).

Oder man stellt sich die Aufgabe, ein einfacheres oder komplizierteres — in vielen Fällen sich auf einen einzelnen Punkt oder eine einzelne Gerade reduzierendes — geometrisches Gebilde zu konstruieren, das zu einem geg. Gebilde in geg. Beziehungen steht, oder dessen Bestandteile in geg. Beziehungen zu einander stehen.

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822.

Die Geometrie ist die Wissenschaft der Konstruktion im Raum; sie stellt die Regeln dar, nach denen bestimmte Gestalten in ihm erzeugt werden, und leitet daraus die Gesetze, Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen derselben ab.

Ziegler, Grundrifs der ebenen Geometrie. — Landshut 1881.

Die Geometrie lehrt die Abhängigkeit räumlicher Eigenschaften.

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

Die Geometrie .... beschränkt sich auf die Nachweisung der Gesetze und Bedingungen, an welche die Konstruktionen im Raume gebunden sind, und auf die Darstellung und Ver-

gleichung der Eigenschaften, die an den räumlichen Gegenständen als solchen wahrgenommen werden.

Klügel.

Geometrie ist die Wissenschaft von den Formen ausgedehnter Gröfsen. Sie unterscheidet sich von der Analysis dadurch, dafs sie eigentlich nicht rechnet, die Gröfsen nicht auf eine Einheit, weder eine bestimmte noch unbestimmte bezieht, sondern die Vergleichungen teils durch Zerlegungen und Zusammensetzungen macht, teils die Gröfsen paarweise, nach ihren Verhältnissen vergleicht. Die Geometrie nimmt die Bilder der intellektuellen Gröfsen selbst zu Symbolen ....

Lambert, Organon. I. B. S. 502. (Entnommen aus Pfleiderer.)

„Den Begriff der Ausdehnung haben wir unmittelbar durchs Gefühl, mittelbar auch durchs Sehen. — Die Wissenschaft der Gröfse der Ausdehnung ist die Geometrie.“

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

„Die Form, die Gestalt, der mathematische Körper, der Raum, welchen der physische Körper einnimmt, ist das aus der äufseren Wahrnehmung durch Abstraktion Erhaltene, Gegebene, Mögliche, Denkbare und der Gegenstand geometrischer Untersuchung.“

„Die Geometrie zerfällt notwendig in die drei Teile:
die Lehre von den Linien,
die Lehre von den Flächen,
die Lehre von den Körpern.

Ein jeder dieser Teile besteht in der Untersuchung über die Natur und Beschaffenheit des Bildungsgesetzes der entsprechenden Raumgröfsen und über die Relationen, die aus Verbindungen derselben hervorgehen. Bei der Verbindung von Raumgebilden hat man nicht blofs auf ihre Gröfse, sondern auch auf ihre Lagen und Richtungen zu sehen.“

Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

„Die Geometrie hat die Gesetze zu entwickeln, welchen die Gröfsen als räumliche unterworfen sind. Der allgemeine Teil der Geometrie hat die verschiedenen Arten der Raumformen nachzuweisen. Es sind deren vier: Körper, Fläche, Linie, Punkt.“

„Die Geometrie zerfällt in ihren einzelnen Teilen in Elementarlehre und Beziehungslehre. Jene hat die Gegenstände an und für sich zu betrachten, diese die Gegenstände verschiedener Klassen aufeinander zu beziehen.“

Helmholtz, Popul.-wissensch. Vorträge. III. p. 21. Über den Ursprung und die Bedeutung der geometr. Axiome.

p. 25: „Die Geometrie ist die mathematische Lehre vom Raume.“

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844.

„An jedem durch die Sinne wahrnehmbaren Gegenstande unterscheidet man zweierlei: nämlich den Stoff, aus dem er besteht, und den Raum, den er einnimmt; ersterer wird die Materie, letzterer die Form genannt. Denkt man sich von einem Gegenstande die Materie mit allen ihren Eigenschaften gänzlich hinweg, so bleibt für die Vorstellung nichts mehr als die Form desselben übrig. Die Wissenschaft nun, welche sich mit der Untersuchung der Eigenschaften und der gegenseitigen Abhängigkeit der verschiedenen Formen beschäftigt, heifst Geometrie.“

„Um nun die Eigenschaften und die wechselseitige Abhängigkeit der verschiedenen Gattungen geometrischer Gröfsen zu erforschen, ist es vor allem nötig, die Art und Weise kennen zu lernen, auf welche sie im Raume untereinander verbunden sein, oder mit andern Worten die Lage zu untersuchen, welche sie gegeneinander einnehmen können.“

(Geometrie der Lage „es liegt in der Natur ihrer Aufgabe, dafs sie die geometrischen Gröfsen vornehmlich als gar nicht oder wenigstens als unvollständig begrenzt betrachtet.“)

„Das zweite Hauptgeschäft der Geometrie besteht in der Vergleichung ihrer Gröſsen untereinander.“ „Die Vergleichung selbst aber muſs der Natur der Sache nach notwendig auf einen doppelten Gegenstand gerichtet werden, nämlich auf die Gestalt und auf die Quantität oder den räumlichen Gehalt der geometrischen Gröſsen.“ (Geometrie der Gestalt, Geometrie des Maſses.)

„Das dritte Hauptgeschäft der Geometrie besteht in der Ermittlung der gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen geometrischen Gebilde, d. h. in der Aufsuchung der Grundgesetze, nach denen alle die mannigfachen Erscheinungen der Raumwelt untereinander verbunden sind und sich organisch auseinander entwickeln. Diese Grundgesetze umfassen aber nicht allein die Lage, sondern auch die Gestalt und die Quantität der geometrischen Gröſsen; ihre Aufsuchung und spezielle Anwendung bildet daher für die oben erwähnten drei Hauptteile der Geometrie den gemeinsamen Vereinigungspunkt und gewissermaſsen die Krone der ganzen Wissenschaft.“ (Organische Geometrie.)

Crelle, Über Parallelen-Theorien und das System in der Geometrie. — Berlin 1816.

p. 18: „Die Geometrie ist die Wissenschaft der Gröſsen im Raume, die durch ihre Grenzen bestimmt werden.“

p. 30: „Der Gegenstand der Geometrie ist also der Raum.“

p. 31: „Der Raum kann begrenzt oder ganz oder zum Teil unbegrenzt sein. Nur durch seine Grenzen ist ein Raum von dem andern verschieden und zwischen denselben Grenzen liegt nur ein und derselbe Raum. Deshalb hat die Geometrie insbesondere die Grenzen der Räume zum Gegenstande.“

Schmitz-Dumont, Die math. Elem. der Erkenntnis ...

„Die Geometrie operiert mit den Begriffen des Nebeneinander, d. h. mit den beiden heterogenen Begriffen Entfernung und Richtung. Entfernung oder Gröſse ist allgemein durch die arithmetischen Zeichen symbolisierbar; die Richtung aber nur unter bestimmten Bedingungen.“

Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie etc. — Berlin 1826.

p. 1. „Die Geometrie ist die Wissenschaft von der Gröfse und Gestalt begrenzter Räume.“

Nachdem sodann die Gebilde des Raumes betrachtet sind, heifst es:

p. 3. „Das Verfahren, durch welches man die Gröfse und Gestalt der Figuren vergleicht, das heifst, durch welches man, vermittelst Figuren, von deren Gröfse und Gestalt man ursprüngliche Vorstellungen hat, von beliebigen Figuren klare Vorstellungen ausdrückt, heifst Messen. Dieses Messen ist der Gegenstand der Geometrie. Deshalb heifst sie auch Mefskunst.“

Crelle teilt die Geometrie an späterer Stelle in zwei Haupt- und verschiedene Unterabteilungen ein. Die erste Hauptabteilung ist der Lehre von den geraden Linien und den Ebenen gewidmet (sowohl Figuren, wie Körper werden betrachtet), die zweite Hauptabteilung den krummen Flächen und Linien.

Fenkner, Lehrbuch der Geometrie. — Braunschweig 1888.

p. 1. „Die Geometrie ist die Lehre von den Raumgröfsen.“

p. 4. „Die Geometrie beschäftigt sich nicht nur, wie oben angegeben, mit den unter Raumgröfsen bestehenden Beziehungen, sondern auch mit der Zusammenstellung gegebener Raumgröfsen zu einer vorgeschriebenen Form, d. h. mit Konstruktionen.“

Francoeur, Vollst. Lehrkurs der reinen Mathematik. Übersetzt von Külp. — Bern, Chur u. Leipzig 1843.

Ersten Bandes drittes Buch: Elementar-Geometrie.

p. 3. „Die Geometrie ist die Wissenschaft, welche sich zur Aufgabe macht, die Ausdehnung zu messen, und die Formen und Eigenschaften derselben näher zu betrachten.“

---

v. Forstner, Grundrifs der Elemente d. r. Math. — Berlin 1826.

„Eine stetig ausgedehnte oder kontinuierliche Gröfse ist eine solche Gröfse, deren Teile so zusammenhängen, dafs der Anfang des einen Teiles zugleich das Ende des andern Teiles ist.

Die Geometrie ist derjenige Teil der reinen Mathematik, welcher sich mit den stetig ausgedehnten Gröfsen beschäftigt."

Frankenbach, Lehrb. d. Math. I. — Liegnitz 1889.

„Die Geometrie beschäftigt sich mit der Darstellung und Betrachtung räumlicher Gebilde."

Grunert, Lehrb. d. Math. II. — Brandenburg 1870.

„Die Geometrie, im weitesten Sinne des Wortes, ist die Wissenschaft vom Raume."

Man ersieht aus den mitgeteilten Zitaten, dafs die Elementar-Geometrie im wesentlichen als Geometrie des Mafses aufgefafst wird. Nur Arneth in seinem Systeme der Geometrie und Bretschneider in seinem Lehrgebäude der niederen Geometrie gehen auch auf die Geometrie der Lage ein. Besonders die Ausführungen des letzteren erscheinen durch ihre Ausführlichkeit und die Zusammenfassung der beiden Zweige der Geometrie in der „organischen Geometrie" von besonderem Werte. Im Vergleich mit den übrigen Zitaten ist ferner von origineller Bedeutung dasjenige von Schmitz-Dumont. Dadurch, dafs hier die Begriffe festgestellt werden, mit denen die Geometrie bei der Betrachtung ihrer Objekte operiert, wird auf das Natürlichste die Einteilung gewonnen. Operieren wir mit dem Begriff der Entfernung allein, so handelt es sich um Geometrie des Mafses, operieren wir mit demjenigen der Richtung allein, so haben wir Geometrie der Lage. Werden die Beziehungen zwischen beiden aufgesucht, so entwickelt sich die organische Geometrie.

III. Kapitel.

Die Raumgebilde.

(Körper, Fläche, Linie, Punkt.)

Während das Gebiet der Geometrie der Raum selbst als solcher ist, so haben wir jetzt kennen gelernt, dafs der Gegenstand der Geometrie die Raumgröfsen sind, wobei das Wort Gröfsen in rein mathematischem Sinne zu nehmen ist, d. h. ohne den Inbegriff der Ausdehnung. Es ist deshalb auch immer mehr ein anderer Ausdruck aufgekommen, durch den eine falsche Vorstellung oder eine Verbindung falscher Eigenschaften mit dem Begriff glücklich vermieden wird. Es ist an Stelle des Ausdrucks Raumgröfsen der Ausdruck Raumgebilde oder räumliches Gebilde getreten.[1])

Die räumlichen Gebilde sind nun folgende: Körper, Fläche, Linie, Punkt.[2]) Die Anordnung in dieser Weise ist als die einzig berechtigte oben nachgewiesen.[3]) Die verschiedenen Ansichten und Erklärungen werden dazu dienen, die Erkenntnis des Gegenstandes der Geometrie klar zu legen.[4]) Von zwei

---

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen am Anfang des ersten Kapitels.

[2]) Man vergl. hierzu: Donadt, Das mathematische Raumproblem etc. p. 32: „Schon Hume erklärt in seiner Abhandlung über die menschliche Natur, dafs wir uns Linien nicht anders vorstellen als in Flächen und diese nur in Körpern und diese wieder nur im Raume, wir abstrahieren nur von einer resp. zwei Abmessungen.

Wir sind durchaus nicht im Stande, wie Erdmann meint, den Raum zu Körpern, Flächen, Linien zu verengen, wir können höchstens Flächen und Linien als Verengungen von Körpern auffassen, denn wir können uns Flächen und Linien nur als Grenzen von Körpern, d. h. an Raumgebilden vorstellen.“

[3]) Kapitel I. — Man vergleiche Hoffmann, Die Prinzipien des 1. Buches von Euklids Elementen in H. Z. III.; p. 141: „Er (Euklid) fällt so zu sagen mit der Thüre ins Haus, fängt gerade mit dem Schwierigsten, mit dem Punkte an, während uns doch die gesamte Natur darauf hinweist, die Raumwissenschaft mit dem Körper zu beginnen.“

[4]) Die ausführliche Behandlung der Grundbegriffe möge ihre Rechtfertigung u. a. finden in den Ausführungen des Aufsatzes: Mahnung an die Mathematiker von Dir. Dr. Müller (Neustrelitz) in H. Z. VI. p. 261 —278. — Der Aufsatz enthält aufserordentlich viel Beherzigenswertes

besonderen Gebilden wird besonders gehandelt werden müssen, von der Ebene und der geraden Linie; diese sind noch mannigfach der Gegenstand der besonderen Betrachtung gewesen, dafs sie aufserhalb der allgemeinen Behandlung einen Platz für sich haben müssen.

Die schon oben vorangestellte Erklärung des geometrischen Körpers sei der Übersicht halber hier noch einmal erwähnt.

Geometrischer Körper ist der durch Abstraktion gewonnene ideelle Raumteil, dessen reelles Substrat ein Körper der uns umgebenden Sinnenwelt ist.[1]) Beim Körper haben wir — aber auch nur bei ihm allein — wirklich reelle Bilder in der Aufsenwelt,[2]) so dafs man behaupten darf, der Körper allein ist wirklich vorstellbar, rein anschaulich auch in der äufseren Anschauung.[3])

---

und sollte keinem Lehrer der Mathematik unbekannt sein. — Man vergl. H. Z. VI.; p. 457/58. — Ferner V. Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schulgeometrie; in H. Z. VII. p. 179—184.

[1]) Die analytische Definition des festen Körpers ist folgende:
Helmholtz, Gött. Nachr. 1868.

p. 199: „Zwischen den $2n$ Koordinaten eines jeden Punktpaares, welches einem in sich festen Körper angehört, besteht eine von der Bewegung des letzteren unabhängige Gleichung, welche für alle kongruenten Punktpaare die gleiche ist.“

[2]) Helmholtz, Göttinger Nachrichten, 1868.

p. 193: „.... da wir es in der Geometrie stets mit idealen Gebilden zu thun haben, deren körperliche Darstellung in der Wirklichkeit immer nur eine Annäherung an die Forderungen des Begriffes ist, und wir darüber, ob ein Körper fest, ob seine Flächen eben, seine Kanten gerade sind, erst mittels derselben Sätze entscheiden, deren thatsächliche Richtigkeit durch die Prüfung zu erweisen wäre.“

[3]) Helmholtz, Pop.-wiss. Vortr. III. 2. „Über den Ursprung etc.“

p. 28: „Unter dem viel gemifsbrauchten Ausdrucke „sich vorstellen“ oder „sich denken können, wie etwas geschieht“ verstehe ich — und ich sehe nicht, wie man etwas anderes darunter verstehen könne, ohne allen Sinn des Ausdrucks aufzugeben —, dafs man sich die Reihe der sinnlichen Eindrücke ausmalen könne, die man haben würde, wenn so etwas in einem einzelnen Falle vor sich ginge. Ist nun gar kein sinnlicher Eindruck bekannt, der sich auf einen solchen nie beobachteten Vorgang bezöge, wie für uns eine Bewegung nach einer vierten, für (jene) Flächenwesen eine Bewegung nach der uns bekannten dritten Dimension

Bretschneider geht noch weiter und spricht auch der Vorstellung der Körper jede Anschaulichkeit ab, wie aus dem folgenden Zitat hervorgeht, das hier seine Stelle finden möge, wenn auch einige Punkte darin berührt werden, die erst später besprochen werden.

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie.

„Unbegrenzte geometrische Gröfsen können wir schon ihrer endlosen Ausdehnung halber nicht sinnlich darstellen, aber ebensowenig ist dies mit den vollbegrenzten möglich. Wir vermögen nur uns Bilder derselben zu verschaffen, indem wir physische Körper so formen, dafs ihre räumliche Ausdehnung der der abzubildenden geometrischen Gröfsen möglichst genau entspricht, und dafs diejenigen Abmessungen, welche etwa den letzteren mangeln, so gering als möglich ausfallen. Dies thun wir z. B., wenn wir einen Punkt durch ein Tüpfelchen Tusche, eine Linie durch einen feinen Faden, eine Fläche durch einen dünnen Papierbogen u. s. w. darstellen. Alle diese Dinge haben stets drei Abmessungen und können schon um deswillen keine wahren geometrischen Punkte, Linien und Flächen sein. Allein auch nicht einmal geometrische Körper lassen sich auf diese Art zur Anschauung bringen, weil sich die Form von dem zu dem physischen Körper verwendeten Stoffe nicht trennen läfst. Es fehlt daher allen diesen Bildern gleich die erste Eigenschaft geometrischer Gröfsen, die Durchdringlichkeit."

Es läfst sich diesen Ausführungen eine gewisse Berechtigung nicht absprechen; so ist z. B. auch die Farbe eine Eigenschaft, die sich von der Vorstellung eines Körpers schwer oder gar nicht trennen läfst. Es scheint mir aber der Schwerpunkt bei diesen Betrachtungen auf einem anderen Gebiete zu liegen; nicht darauf kommt es an, ob wir die physischen Eigen-

---

des Raumes wäre, so ist ein solches „Vorstellen" nicht möglich, ebensowenig als ein von Jugend auf absolut Blinder sich wird die Farben „vorstellen" können, wenn man ihm auch eine begriffliche Beschreibung derselben geben würde."

Man vergl. Lotze, Psychologie p. 327 und Deinhardt, Gymnasialunterricht p. 177 oben.

schaften von einem Körper wegdenken können, sondern darauf, dafs es wirklich räumliche oder körperliche Gebilde in der Aufsenwelt giebt, dafs wir von den mathematischen Körpern wirklich reelle Bilder haben: was diese Bilder sonst noch, aufser der Körperlichkeit, für Eigenschaften haben, das kommt gar nicht in Betracht; deshalb gelingt es uns auch, in geringerem oder höherem Mafse, von diesen Eigenschaften zu abstrahieren und uns geometrische Körper vorzustellen.

Da es sich bei der Betrachtung von Körpern auch um ein Messen derselben handelt, so möge gleich hier erwähnt werden, dafs wir dieses Messen der nach allen Richtungen ausgedehnten Körper nur nach drei Hauptrichtungen auszuführen haben, um über die Gröfse der Körper unterrichtet zu sein. Diese drei Hauptrichtungen heifsen Dimensionen oder Abmessungen."[1])

Die Grenzen des Körpers heifsen Flächen.[2]) Diese sind nicht Teile des Körpers; denn, wenn sie Teile des Körpers wären, so müfsten sie wiederum von dem übrigen Körper abgegrenzt sein und es würde sich um die Grenzen dieser Teile handeln und so in infinitum. Die Grenzfläche eines Körpers gehört weder zum Körper selbst, noch zu dem Raum, von dem der Körper abgegrenzt ist; sie ist die Stelle, wo Körper und übriger Raum aneinander stofsen; eine Fläche nimmt keinen Teil des Raumes ein, die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit (Festigkeit) läfst sich ihr auch nicht einmal in Gedanken beilegen. Die Flächen sind daher vollständig unvorstellbar. Auf alle äufsere und innere Anschaulichkeit mufs jetzt verzichtet werden. Unser ganzes Anschauungsvermögen ist ein dreidimensionales.[3])

---

[1]) Man vergleiche den Artikel Dimension.

[2]) Jedoch mufs auch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dafs es Flächen giebt, welche nicht vollständige Körper begrenzen, gewissermafsen aus dem Raum ein Stück ausschneiden, sondern die nur einen Teil des Raumes von dem anderen Teil des Raumes abgrenzen; dahin gehört z. B. die unbegrenzte, unendliche Ebene.

[3]) Wundt, System der Philosophie, p. 121: „Zunächst kann eine solche Gliederung nur an einem Ganzen der Anschauung vorgenommen werden, welches eine Mannigfaltigkeit von Elementen enthält, die zu einander in bestimmten Relationen stehen, um dann weiterhin auch auf

Gebilde von einer anderen Anzahl von Dimensionen können wir uns weder in der äufseren noch in der inneren Anschauung vorstellen, wir können sie nur in Gedanken setzen. An die Stelle von Vorstellungen treten Begriffe. Für die Flächen giebt es keine reellen Bilder. Die Flächen begrenzen also Raumteile, d. h. Körper, trennen sie von dem übrigen Raum. Der Körper liegt auf der einen Seite von der Fläche aus, der Raum auf der anderen. Die Fläche selbst aber hat keine Seiten; man kann nicht von einer linken und rechten Seite der Fläche sprechen, sondern nur sagen links von ihr, rechts von ihr oder oberhalb und unterhalb; bei der Fläche selbst fallen gewissermafsen linke und rechte (resp. obere und untere, vordere und hintere) Seite zusammen.[1]) Da die Flächen Grenzen nicht Teile des Körpers sind, so nehmen sie auch wie gesagt gar keinen Raum ein, sie sind genau genommen eine Negierung des Raumes.[2]) Wenn sie trotzdem als nach zwei Dimensionen ausgedehnt angesehen und demgemäfs betrachtet werden, so ergiebt sich hier eine aufserordentliche Schwierigkeit. Sie sind zugleich Null und doch auch zugleich Gröfsen, denn wir können sie teilen und können sie aus Teilen zusammensetzen; aber da sie nach einer Dimension keine Ausdehnung haben, so sind sie Null, denn wir können andererseits uns Flächen aufeinander gelegt denken in beliebiger Anzahl, ohne dafs ein Körper

---

solche Mannigfaltigkeiten übertragen zu werden, welche nur begrifflich zu denken, in der Anschauung aber blofs in der Form stellvertretender Vorstellungen festzuhalten sind." Zu den Mannigfaltigkeiten, die nur „begriffllich zu denken" sind, gehören aber unstreitig auch die zweifache und einfache und nullfache Mannigfaltigkeit des Raumes: Flächen, Linien und Punkte.

[1]) Hierzu zu vergleichen: E. Müller, Elemente der Geometrie. I. 8. 16—17. 25. 31—32. — II. Einleitung.

[2]) Auf folgende Veranschaulichungsmittel, deren eines sich im Lehrbuch von Wunder findet, während das zweite Reidt in seiner Anleitung zum mathematischen Unterricht anführt, sei ganz besonders hingewiesen, da sie von vorzüglichem Werte erscheinen. 1) In einem Glase Wasser und Öl: die Grenzfläche ist weder Wasser noch Öl; auch nicht etwa irgend etwas den Raum erfüllendes, sondern nur der Ort (die Stelle), wo Wasser und Öl aneinander grenzen, die Berührungsfläche. — 2) Wie weit kann man in einen Körper hineinstechen, ohne aus der Grenzfläche heraus zu gehen?

daraus entsteht: man würde deshalb auch richtiger sagen, in einander legen; es handelt sich also um Gröfsen ganz besonderer Art. Aufserdem ist der Ausdruck, dafs die Flächen nur nach zwei Richtungen (Hauptrichtungen) ausgedehnt sind (zwei Dimensionen haben), in dieser Form offenbar falsch. Es mufs vielmehr heifsen, ein unendlich kleiner Teil einer Fläche (ein Flächenelement, vergl. weiter unten) ist nur nach zwei Dimensionen ausgedehnt (hat nur zwei Dimensionen) [analog ein unendlich kleiner Teil einer Linie (ein Linienelement) ist nur nach einer Dimension ausgedehnt (hat nur eine Dimension). Man denke nur an die Raumkurven, so wird man diesen Ausführungen zustimmen müssen]. Nur eine Fläche giebt es, von der wir schlechtweg sagen können, sie ist nur nach zwei Dimensionen ausgedehnt, das ist die Ebene, und nur eine Linie giebt es, die nur nach einer Dimension ausgedehnt ist, das ist die gerade Linie. Für alle anderen Raumgebilde von der Art der Flächen und Linien gilt diese Bestimmung nur in der oben präzisierten, genauen Ausdrucksweise. Doch von der Ebene und geraden Linie soll weiter unten ausführlich gehandelt werden.

Die Grenzen der Flächenteile sind Linien. Was von den Flächen gesagt ist, gilt auch von den Linien, sie sind unvorstellbar, ohne reelle Bilder.[1]) Sie begrenzen Flächenstücke,

---

[1]) Man vergl. J. C. Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Math. etc. III.

„Während wohl niemand ernstlich behaupten wird, er habe von einer Fläche eine anschauliche Vorstellung, ohne auf beiden Seiten den Raum mit vorzustellen, so dürfte doch mancher glauben, mit der Linie verhalte es sich anders; d. h. diese sei auch unabhängig von irgend einer Fläche, deren Grenze sie ist, gewissermafsen frei im Raume schwebend vorstellbar. Dies ist aber nur Selbsttäuschung. Ich frage jeden auf sein Gewissen, ob das wirklich eine Linie ist, was er so anschaulich und unabhängig von jeder Fläche frei im Raume sich vorzustellen vermag, und nicht vielmehr ein sehr dünner Faden, dem, wenn auch nur eine sehr geringe, aber doch immer noch eine Breite zukommt, und der gänzlich verschwindet, sobald die Breite verschwindet? . . . Wie in der empirischen, so kann auch in der reinen Anschauung eine Linie nur als Grenze einer Fläche oder eines Teils derselben vorgestellt werden. Sie ist durchaus nichts als die Grenze einer Fläche.

d. h. Felder, trennen diese von der übrigen Fläche. Das Feld liegt auf der einen Seite von der Linie aus, die unendliche Fläche auf der anderen. Auch die Linie hat selbst keine Seiten (vergl. die Ausführungen bei den Flächen).

Die Grenzen der Linienteile sind Punkte. Ihnen fehlt auch die letzte noch übrig gebliebene Dimension. Sie sind ohne jegliche Ausdehnung. Auch sie sind unvorstellbar, ohne reelle Bilder. Sie begrenzen Linienteile, d. h. Strecken, trennen diese von der übrigen Linie. Auf der einen Seite vom Punkt aus liegt die Strecke, auf der anderen die übrige Linie. Der Punkt selbst hat keine Seiten (s. o.).[1])

Beim Punkte findet sich gewöhnlich in den Lehrbüchern die Bemerkung, dafs er unvorstellbar sei. Als wenn nicht auch schon Flächen und Linien unvorstellbar wären. Dafs wir uns Bilder, aber keine reellen, von diesen Raumgebilden machen, geschieht auf die Weise, dafs wir einen Körper uns vorstellen, der nach einer resp. zwei Dimensionen im Verhältnis zu der resp. den übrigen entweder sehr klein oder sehr grofs gedacht wird. Dabei behalten wir aber immer die Vorstellung eines Körpers. Ein Gebilde, das nach einer oder mehreren Dimensionen wirklich Null ist, bleibt absolut unvorstellbar. Je gröfser wir die bleibenden Dimensionen im Verhältnis zum weggedachten annehmen, um so mehr nähert sich die Vorstellung des Körpers derjenigen einer Fläche oder Linie, aber in sie übergehen würde sie erst beim wirklichen Nullwerden einer Dimension — und dies ist in der Anschauung, auch in der inneren, unmöglich.[2])

Im Verlaufe der Ausbildung des geometrischen Denkens kam man nun so weit, dafs man auch die nicht vorstellbaren Raumgebilde Fläche, Linie, Punkt — nicht vorstellbar, weil sie keine reellen Bilder besitzen — als selbständige Gebilde auffafste, sie von ihrer ursprünglichen Eigenschaft als Grenzen befreite und ihre logische Möglichkeit annahm und damit überhaupt die logische Möglichkeit von Gebilden von anderer, aller-

---

[1]) Vergl. Du Bois-Reymond, Reden. I. Folge. 1886. p. 112: „Der Punkt ist die im Raume vorgestellte Negation des Raumes."

[2]) Vergl. Herbart, Psychologie p. 122.

dings geringerer als dreifacher Mannigfaltigkeit.[1]) Aber die Betrachtung dieser Gebilde von zweifacher, einfacher und nullfacher Mannigfaltigkeit ist im dreifachen Raume logisch möglich und in gewisser Hinsicht mit der Anschauung in einen gewissen Einklang zu bringen, und so werden diese Gebilde auch schon in der Elementargeometrie als Begriffe, die unserem Denken a priori gegeben sind, angesehen werden dürfen.[2])

Es dürfte nicht ohne Interesse sein an dieser Stelle auf die bekannte Hypothese Helmholtz' von zweidimensionalen Wesen näher einzugehen, um die Folgerungen aus ihr auf ihre Richtigkeit zu prüfen und festzustellen, inwiefern diese Betrachtungen von Wert sind für die Erörterung der räumlichen Grenzgebilde, wenn wir dieselben als selbständige Objekte unserer geometrischen Betrachtung auffassen. Es heifst da:

Helmholtz, Popul.-wissensch. Vorträge. III. 2, „Über den Ursprung etc.“[3])

p. 27. „Denken wir uns — darin liegt keine logische Unmöglichkeit — verstandbegabte Wesen von nur zwei Dimensionen, die an der Oberfläche irgend eines unserer festen Körper leben und sich bewegen. Wir nehmen an, dafs sie nicht die Fähigkeit haben, irgend etwas aufserhalb dieser Oberfläche wahrzunehmen, wohl aber Wahrnehmungen, ähnlich den unsrigen, innerhalb der Ausdehnung der Fläche, in der sie sich bewegen, zu machen. Wenn sich solche Wesen ihre Geometrie ausbilden, so würden sie ihrem Raume natürlich nur zwei Dimensionen zuschreiben. Sie würden ermitteln, dafs ein Punkt, der sich bewegt, eine Linie beschreibt, und eine Linie, die sich bewegt, eine Fläche, was für sie das vollständigste Raumgebilde wäre, was sie kennen. Aber sie würden

---

[1]) Man vergleiche das obige Zitat aus Wundt, System der Philosophie.

[2]) Man vergleiche hierzu die Ausführungen von Schmitz-Dumont in „Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie“ im Zitat auf Seite 183, Fufsnote 1.

[3]) Man vergleiche hierzu den Aufsatz von Gilles: Bedenkliche Richtungen in der Mathematik, in H. Z. XI, p. 5—24 und die dazu gelieferten Bemerkungen in demselben Bande p. 274—281. p. 435/36.

sich ebensowenig von einem weiteren räumlichen Gebilde, was entstände, wenn eine Fläche sich aus ihrem flächenhaften Raume herausbewegte, eine Vorstellung machen können, als wir es können von einem Gebilde, das durch Herausbewegung eines Körpers aus dem uns bekannten Raume entstände."

An diese Ausführungen Helmholtz' möchte ich folgende Bemerkungen knüpfen. Wenn diese Helmholtzschen Flächenwesen sich Linien aus der Bewegung von Punkten entstanden vorstellten, so würde schon hier ein Unterschied mit unserem Vorstellungsvermögen zu tage treten, denn offenbar würden sich diese Flächenwesen doch nur solche Linien vorstellen können, die auf ihrer Fläche möglich sind, nicht aber Linien ganz beliebiger Art. Alle sogenannten doppeltgekrümmten Linien z. B. würden ausgeschlossen sein. Denken wir uns die Fläche krumm, so würden unter Umständen unsere geraden Linien wegfallen. Ferner würde die Unendlichkeit der Linien nicht allgemein gedacht werden können, z. B. bei Flächenwesen, die auf der Oberfläche eines Würfels lebten, würden die geraden Linien am Ende ihres Flächenstückes begrenzt sein. Und wie müfsten sie über ihre Fläche selbst denken? Ein bewufstes Übergehen auf eine andere Fläche des Würfels ist unmöglich anzunehmen, da hiermit dreidimensionales Denken verbunden sein würde. Ferner würden diese Flächenwesen nicht ermitteln, dafs die Linien bei der Bewegung Flächen beschreiben, wie Helmholtz meint, sondern diese Fähigkeit müfste dahin ganz bedeutend eingeschränkt werden; sie würden nur ermitteln können, dafs Linien Stücke ihrer Fläche beschreiben. Sie würden sich überhaupt keine beliebigen, unbegrenzten Flächen resp. unendliche Flächen denken oder vorstellen können, sondern nur die eine einzige, auf der oder in der sie leben.[1])

Unseren Körpern entsprechen bei diesen Flächenwesen Figuren, aber nicht solche von beliebiger Art, sondern solche, die der Bedingung unterworfen sind, Teile der bestimmten Fläche zu sein.

---

[1]) Denn die Vorstellung beliebiger unendlicher Flächen ist nur im dreidimensionalen Raume möglich und dieser fehlt ja dem Denken der Flächenwesen.

Wir sehen also, dafs die Vorstellungen dieser Flächenwesen von den unsrigen ganz verschieden sein würden. Die Vorstellungen derselben würden von einer grofsen Zahl von Bedingungen abhängig sein, die Bewegung würde nicht mehr eine beliebige sein, sondern nur eine solche, die den Gesetzen der Fläche unterworfen wäre, kurz das Vorstellen oder Denken geometrischer Gebilde ist mit dem unsrigen nicht zu vergleichen und es fallen damit die Folgerungen, die Helmholtz aus seinen Ausführungen zieht.

Diese meine Bedenken werden bestätigt durch folgende Stellen der Helmholtzschen Abhandlung selbst:

p. 30. „Es ist klar, dafs die Wesen auf der Kugel bei denselben logischen Fähigkeiten, wie die auf der Ebene, doch ein ganz anderes System geometrischer Axiome aufstellen müfsten, als jene und wir selbst in unserem Raume von drei Dimensionen."

Ebenda: „Daraus geht hervor, dafs an einer solchen Fläche (der Oberfläche eines eiförmigen Körpers) sich nicht einmal ein so einfaches Raumgebilde, wie das Dreieck ist, ohne Änderung seiner Form von einem Orte nach jedem andern fortbewegen lassen würde."[1])

Ebenda: „Daraus folgt weiter, dafs es eine besondere geometrische Eigenschaft einer Fläche ist, wenn sich in ihr liegende Figuren ohne Veränderung ihrer sämtlichen längs der Fläche gemessenen Linien und Winkel frei verschieben lassen, und dafs dies nicht auf jeder Art von Fläche der Fall sein wird. Die Bedingung dafür, dafs eine Fläche diese wichtige Eigenschaft habe, hatte schon Gaufs in seiner berühmten Abhandlung über die Krümmung der Flächen nachgewiesen. Sie ist, dafs das, was er das „Mafs der Krümmung" genannt hat $\left(\frac{1}{r_1 r_2}\right)$, überall längs der ganzen Ausdehnung der Fläche gleiche Gröfse habe."

---

[1]) Wie ist es mit unendlich kleinen Gebilden? Ziehen wir endliche Gebilde in Betracht, so würden doch schon Strecken, d. h. hier Stücke von Linien, nicht ohne Änderung ihrer Form bewegt gedacht werden können; diese ganze Betrachtungsweise ist aber überhaupt nur für ein dreidimensional denkendes Wesen möglich.

p. 35. „Wir als Bewohner eines Raumes von drei Dimensionen und begabt mit Sinneswerkzeugen, um alle diese Dimensionen wahrzunehmen, können uns die verschiedenen Fälle, in denen flächenhafte Wesen ihre Raumanschauung auszubilden hätten, allerdings anschaulich vorstellen,[1]) weil wir zu diesem Ende nur unsere eigenen Anschauungen auf ein engeres Gebiet zu beschränken haben. Anschauungen, die man hat, sich wegdenken ist leicht; aber Anschauungen, für die man nie ein Analogon gehabt hat, sich sinnlich vorstellen ist sehr schwer. Wenn wir deshalb zum Raume von vier Dimensionen übergehen, so sind wir in unserem Vorstellungsvermögen gehemmt durch den Bau unserer Organe und die damit gewonnenen Erfahrungen, welche nur zu dem Raume passen, in dem wir leben.“

Der Ansicht Helmholtz', dafs wir uns die Raumanschauungen flächenhafter Wesen anschaulich vorstellen könnten, „weil wir zu diesem Ende nur unsere eigenen Anschauungen auf ein engeres Gebiet zu beschränken haben“, kann ich nicht zustimmen. Auch bin ich nicht der Meinung, dafs „Anschauungen, die man hat, wegdenken“ leicht ist. Im Gegenteil, ich halte dies für thatsächlich unmöglich und halte daran fest, dafs unser anschauliches Denken nur ein dreidimensionales ist, dafs die Mannigfaltigkeiten von geringerer Anzahl ebensowenig vorstellbar sind, als die von höherer,[2]) und dafs es sich bei räum-

[1]) Jedenfalls aber doch nur so lange, als wir uns die betreffende Fläche anschaulich vorstellen können. Abgesehen davon geht aus den Helmholtzschen Ausführungen meines Erachtens nicht hervor, dafs wir uns die Raumanschauungen flächenhafter Wesen anschaulich vorstellen könnten. Allerdings die Fälle, in denen die Flächenwesen ihre Raumanschauung auszubilden hätten, sind anschaulich vorstellbar — man vergleiche die obigen Ausführungen über die Vorstellbarkeit der räumlichen Gebilde —, damit aber noch keineswegs diese Raumanschauungen selbst.

[2]) Vergl. Schlegel, Über den sogenannten vierdimensionalen Raum. — Berlin 1889.

„Ja selbst unsere Zeichnungen von Linien und Figuren auf einer Ebene entsprechen ja keineswegs genau den reinen geometrischen Konstruktionen unserer Phantasie, sondern sind nur mehr oder weniger grobe Veranschaulichungsmittel für das Auge. Und der einzige Unterschied

lichen Gebilden von anderer Dimensionenzahl als drei um begriffliche, nicht anschauliche Denkobjekte handelt. Der Gegenstand erscheint wichtig genug, um noch folgendem Zitat zu den Ausführungen von Helmholtz aus Donadt, Das mathematische Raumproblem, hier eine Stelle zu geben, das von besonderem Werte erscheint. Die Äufserung Kants: „Wir können von den Anschauungen anderer denkenden Wesen gar nicht urteilen, ob sie an die nämlichen Bedingungen geknüpft seien, welche unsere Anschauungen einschränken und für uns allgemein gültig sind," weist mit Recht darauf hin, dafs die Denkbedingungen für anders denkende Wesen wahrscheinlich ganz andere sind und dafs den Ausführungen Helmholtz' stillschweigend die Voraussetzung zum Grunde liegt, dafs die Flächenwesen ebenso denken wie wir, mit dem einzigen Unterschiede, dafs ihnen die dritte Dimension verschlossen ist. Aber diese Voraussetzung ist ganz unberechtigt, wenigstens liegt kein Grund für ihre Annahme vor. Der Denkprozefs anderer Wesen kann ein von dem unsrigen wesentlich verschiedener sein, so dafs er infolge dessen auch mit unserem Denken gar nicht erfafst werden könnte.

Weitere berechtigte Einwürfe gegen die Hypostasierung solcher fingierten Wesen und ihrer Geometrie haben Weifsenborn (Über die neueren Ansichten vom Raume und den geometrischen Axiomen; Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, herausgegeben von Avenarius. Bd. II. p. 222) und Krause in seiner Schrift „Kant und Helmholtz" (Lahr 1878) gemacht. — Eine fernere Würdigung der Helmholtzschen Hypothese findet sich bei Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. „Man brauchte

---

zwischen den oben genannten Arten von Konstruktionen und denjenigen, welche den vierdimensionalen Raum zu Hilfe nehmen, besteht darin, dafs wir uns die letzteren eben nicht vorzustellen und daher auch nicht, ihrer richtigen Beschaffenheit entsprechend, zu veranschaulichen im Stande sind."

Es scheint mir von Bedeutung, auf den Ausdruck „Veranschaulichungsmittel", den Schlegel hier gebraucht, besonders aufmerksam zu machen, da darin liegt, dafs es sich nicht um eine thatsächliche Anschauung — weder eine äufsere noch innere — handelt.

sich ja nur Flächenwesen vorzustellen, in deren Welt eine körperliche Ausdehnung nicht bestand; sollten diese nicht auch nur in zwei Dimensionen vorstellen? Die empiristische Auffassung forderte dies apriorisch; weil ja alle Vorstellung nur durch Wahrnehmung entstehen sollte.

Es wurde hier wieder einmal Vorstellung und Begriff verwechselt, verleitet durch das alte Erbteil der Sprachmetaphysik, welche von „geometrischen Vorstellungen" spricht.

Allerdings, wenn solche Wesen nur Wahrnehmungen in zwei Dimensionen machen, so wird auch die einfache sinnliche Reproduktion nur diesen gleiche Vorstellungen erzeugen;[1]) denken werden sie jedoch wie jedes denkende Wesen überhaupt, nämlich nach drei Dimensionen, (oder es handelt sich um einen von unserem Denken völlig verschiedenen und daher für uns durch unser Denken nicht zu erkennenden Denkprozefs. D. Verf., vergl. meine obigen Ausführungen) und je nach Veranlassung auch die zweidimensionalen Wahrnehmungen zu dreidimensionalen Vorstellungen kombinieren können."

Schmitz-Dumont geht dann näher auf die Planimetrie dieser Flächenwesen ein, die er als eine ideelle schildert, die sich nirgendwo auf die ihnen wahrnehmbaren Gegenstände anwenden läfst, und identifiziert ihr Axiomensystem mit dem unseren. Besonders geht der Beweis noch darauf aus, dafs

---

[1]) Der gemessene Kreis ist kein Gegenstand, sondern ein Begriff (gezeichnete Linien sind keine graphischen Repräsentationen von Vorstellungen, sondern von Begriffen); denn eine geometrische Vorstellung ist unmöglich. Was man gemeiniglich geometrische Vorstellung nennt, hat weder Farbe, noch sonst ein sinnliches Merkmal, weil die Geometrie vorschreibt, von allen solchen zu abstrahieren. Wir können die Vorstellung eines Körpers, eines Stückes Papier, Holz oder feurige Linien in dieser oder jener geometrischen Figur fassen; die geometrische Figur als solche ist aber niemals etwas anderes, als die leere Form jener Vorstellung, eine Kombination von Denkbegriffen; und läfst sich deshalb nicht vorstellen, sondern nur denkend bestimmen. Das übliche „ich stelle mir eine Figur anschaulich vor" heifst logisch gesprochen: ich stelle mir einen Gegenstand vor, konstruiert aus sehr dünnen Drähten oder leuchtenden Bändern, oder ein Raumvolum, begrenzt von sehr dünnen Blättern; aber so, dafs deren Begrenzungen möglichst genau den geometrischen Begriffen von der geforderten Figur entsprechen."

die ideellen Flächenwesen eine ideelle gerade Linie sich konstruieren würden, welche mit der unsrigen identisch sein würde, „weil sie allein dem logischen Begriffe identische Richtung genügt."

Ich habe mich mit der Widerlegung der Helmholtzschen Hypothese eingehender beschäftigt, um darzuthun, dafs es sich bei den räumlichen Gebilden Fläche, Linie und Punkt nicht um anschauliche Vorstellungen, sondern um Begriffe unseres Denkens handelt, schon da, wo sie als Grenzen, vielmehr aber noch da, wo sie als selbständige Gebilde betrachtet werden.

Werden diese Raumgebilde losgetrennt von der ursprünglichen Vorstellung an und für sich betrachtet, so erweitert sich zwar damit im allgemeinen der Begriff der geometrischen Gröfse, des räumlichen Gebildes, aber ohne dafs wir dadurch etwa neue Eigenschaften erhalten; noch ferner liegt es, dafs sie durch diese Betrachtungsweise an Anschaulichkeit gewinnen, wie aus den Ausführungen hervorgeht.

Durch die Betrachtungsweise der nicht körperlichen räumlichen Gebilde findet auch meine oben ausgesprochene Behauptung, dafs der Punkt das abstrakteste Element der Geometrie sei, ihre Bestätigung. Wir gelangen vom Körper zur Fläche, von der Fläche zur Linie, von der Linie zum Punkt, indem wir successive von einer Ausdehnung (Dimension) abstrahieren (eine Ausdehnung nach der andern zu Null werden lassen), so dafs also für den Punkt das gröfste Mafs von Abstraktion erforderlich ist.

Es erübrigt noch auf den Begriff Element näher einzugehen; wir verstehen unter Element eines räumlichen Gebildes einen unendlich kleinen Teil desselben, jedoch schon von der ganz bestimmten Art des entsprechenden Gebildes. Ein Flächenelement ist daher ein Stück Fläche, allerdings unendlich klein gedacht, aber doch schon von denselben Eigenschaften, die die Fläche selbst hat, also vor allen Dingen von zweifacher Ausdehnung. Es geht schon aus dieser allgemein gültigen Begriffsbestimmung hervor, dafs es falsch ist, den Punkt als das Raumelement zu bezeichnen. Der Punkt ist ein Element *κατ' ἐξοχήν*, das wir durch Integration zu nichts anderem

summieren können, als wieder zum Punkt. Der Punkt ist die absolute Negation des Raumes, seine Ausdehnung nach allen Richtungen gleich Null — und so wenig wie wir in der Arithmetik durch Addition von Null etwas anderes als Null erhalten, können wir durch Vervielfältigung des Punktes etwas anderes als den Punkt erhalten. Denken wir uns zwei voneinander getrennte Punkte, so wird, auch wenn sie nur durch einen unendlich kleinen Abstand getrennt sind, doch schon eben in diesem unendlich kleinen Abstand das Linienelement gedacht, und es handelt sich nicht mehr um den Begriff Punkt. Der Punkt hat in einer Beziehung mit dem, was er negiert, dem Raum, Ähnlichkeit, nämlich in der Gestaltlosigkeit. Wie wir den unendlichen Raum ohne Gestalt oder Form denken — denn sonst würden wir ja Grenzen denken — so ist auch der Punkt gestaltlos; wir können nicht von einem runden oder eckigen Punkte sprechen, und es wird sich empfehlen, hierauf im Unterrichte besonders aufmerksam zu machen, um das Wesen des Punktes klar zu legen. Die Extreme unendlicher Raum und Punkt berühren sich in der gemeinsamen Eigenschaft der Gestaltlosigkeit.

Ganz verschieden vom Punkte ist das Linienelement, es hat schon eine Dimension und durch Integration erhalten wir die Linie selbst oder ein Stück derselben, je nachdem wir die Grenzen der Integration wählen. Es fragt sich nun, ob das Linienelement auch schon als von der bestimmten Art der Linie gedacht werden müsse, ob es schon von bestimmter Gestalt ist, oder ob jedes Linienelement als gerade aufzufassen ist. Ich bin der Meinung, dafs schon das Element als von bestimmter Art zu denken ist, dafs also z. B. das Element der Kreislinie verschieden ist von dem Elemente der Ellipse oder demjenigen der geraden Linie. Die gegenteilige Meinung vertritt Helmholtz, wie aus der folgenden Stelle hervorgeht. In dem Aufsatze über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, in den Göttinger Nachrichten 1868, sagt er: „In der That sind die unendlich kleinen Flächenelemente einer beliebigen krummen Fläche alle als eben zu betrachten, und also alle einander kongruent, wenn von ihrer Begrenzung abgesehen wird."

Helmholtz tritt dadurch in Widerspruch zu der an anderer Stelle zitierten Äufserung, dafs wir auf einem eiförmigen Körper ein Dreieck nicht von einem Orte an einen anderen bewegt denken können ohne Änderung der Form, sonst hätte er das unendlich kleine Dreieck ausdrücklich ausnehmen müssen. Ich trete, wie schon aus meinen Ausführungen bei der Betrachtung des Linienelementes hervorgeht, für die Meinung ein, dafs auch das Flächenelement schon eine besondere Gestalt oder Form habe — dieser Ausdruck darf nicht mifsverstanden werden; es handelt sich nicht darum, ob das Flächenelement dreieckig oder viereckig gedacht wird, sondern ob es eben oder von bestimmter Krümmung ist —; eine weitere Frage würde die sein, in welcher Gestalt — in anderem Sinne — das Flächenelement zu denken sei, als Dreieck, Viereck oder etwa als kleine Kreisfläche. Entsprechend der Betrachtung endlicher Figuren wird man die einfachste Gestalt zu wählen haben und das Flächenelement als Dreieck, ebenes oder sphärisches zu denken haben; je nachdem es sich um das Element einer Ebene oder einer krummen Fläche handelt. Vielleicht wäre es denkbar, das Flächenelement aller krummen Flächen als ein unendlich kleines Kugeldreieck aufzufassen im Gegensatz zum ebenen Flächenelement; aber schon hierbei würde eine Ungenauigkeit unterlaufen, die gerade bei diesen Betrachtungen vermieden werden mufs, da unstreitig der Ausspruch Riemanns wohl zu beachten ist: „Auf der Genauigkeit, mit welcher wir die Erscheinungen ins Unendlichkleine verfolgen, beruht wesentlich die Erkenntnis ihres Kausalzusammenhangs.“

Man vergleiche hiermit auch den folgenden Ausspruch desselben Forschers:

„Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem inneren Grunde der Mafsverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raume gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, dafs bei einer diskreten Mannigfaltigkeit das Prinzip der Mafsverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders-

woher hinzukommen mufs. Es mufs also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Mafsverhältnisse aufserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden."

Das Element des geometrischen Körpers ist identisch mit dem des Raumes; es handelt sich hier nur um die Grenzen der Integration. Fassen wir das hier in Betracht kommende Element als Raumelement auf, so ist sicherlich die Gestalt des Elementes ohne jegliche Bedeutung, und so wird es auch erlaubt sein von der Form des Körperelementes als einer wesentlichen Begriffsbestimmung abzusehen.

Als gemeinsamen Namen aller dieser Elemente, des Punktes, des Linienelementes, des Flächenelementes, des räumlichen (körperlichen) Elementes darf man wohl dann die Bezeichnung Raumelemente wählen, wobei man jedoch sich bewufst sein mufs der Bedeutung dieses Ausdrucks im Vergleich mit dem Raumelement.

Ist man vom Körper ausgehend zur Erkenntnis von Flächen, Linien und Punkten gekommen, indem man successive die Grenzen der Raumgebilde betrachtet hat, und hat man durch Abstraktion die Grenzgebilde Fläche, Linie und Punkt als selbständige Gebilde, als Raumelemente, gewonnen, so wird nun eine zweite Betrachtungsweise ihre Stelle finden dürfen, diejenige, die die Raumelemente auseinander durch Bewegung[1]) entstehen läfst.

Die hauptsächlichsten Darstellungen dieser Betrachtungsweise werden aus den Zitaten hervorgehen. Sie sind wesentlich nicht voneinander verschieden und wir können in Übereinstimmung mit denselben kurz etwa folgendes aufstellen.

Denkt man sich einen Punkt in Bewegung und nimmt an, dafs er eine Spur seines Weges hinterläfst, so wird diese Spur eine Linie sein.[2])

---

[1]) Man vergleiche den Artikel Bewegung; doch sei auch hier schon auf Wundt, System der Philosophie, p. 127—134, hingewiesen.

[2]) Der Punkt beschreibt eine Linie, so lautet der gewöhnliche kürzere Ausdruck für den genaueren, wie er im Text steht. Genommen ist der Ausdruck wohl von dem Beispiel, das wir zu dieser Erklärung beifügen. Der Ausdruck, der Punkt erzeugt eine Linie, dürfte am besten vermieden

(So hinterläfst ein sich rasch bewegender glühender Körper auf der Netzhaut ein Bild der verschiedenen Lagen, die er nach und nach eingenommen, und wir haben infolge dessen das Bild einer Linie.)

Denkt man sich eine Linie (Stück einer Linie, Strecke) in Bewegung, so wird diese unter Umständen, wenn man wiederum annimmt, dafs eine Spur ihres Weges zurückbliebe, eine Fläche beschreiben.

Denkt man sich eine Fläche (Stück einer Fläche) in Bewegung, so wird diese unter Umständen einen Körper beschreiben.

Der Körper beschreibt wieder einen Körper.[1])

Warum der breitere Ausdruck „Denkt man sich in Bewegung“ anstatt „bewegt sich“ gewählt ist, wird aus den folgenden Betrachtungen hervorgehen, die vorläufig hier eine Stelle finden mögen, während später dem Begriffe der Bewegung noch eine ausführlichere Behandlung zu teil werden soll.

Die mechanische Bewegung kann im wesentlichen eine dreifache sein, die Ortsveränderung eines starren Körpers z. B. fliegender Ball, eine drehende Bewegung um eine Axe z. B. Thüren, Blätter eines Buches (Rotation), drittens eine drehende Bewegung um einen Punkt z. B. Bewegung eines an einen Faden gebundenen Steines.

Zur Kenntnis einer mechanischen Bewegung gehört, dafs wir ihre Richtung, Geschwindigkeit, Dauer (Gröfse) kennen. In der Geometrie abstrahieren wir von zweien dieser Eigenschaften vollständig, von der Geschwindigkeit und der Dauer,

---

werden, da er zu falschen Vorstellungen Anlafs geben könnte; es sei übrigens darauf hingewiesen, dafs der Ausdruck: denkt man sich einen Punkt in Bewegung, zwar allgemein gebräuchlich, aber ungenau ist. — S. Artikel Bewegung und die folgenden vorläufigen Betrachtungen.

[1]) Es mufs aber ausdrücklich erwähnt werden, dafs weder alle Flächen als durch Bewegung von Linien, noch alle Körper als durch Bewegung von Flächen beschrieben angesehen werden können. Dafs noch hinzugesetzt ist „unter Umständen“ wird gerechtfertigt durch die Erwägung, dafs z. B. eine gerade Strecke in ihrer Richtung bewegt gedacht, keine Fläche beschreiben würde, sondern die betreffende Gerade, der sie angehört. Als Beispiel diene ein fliegender Pfeil, also eine Strecke, die wiederum eine Linie beschreibt.

und betrachten nur die Richtung, wir können es vielleicht so ausdrücken, daſs wir sagen, es handelt sich nur um das Resultat der Bewegung, nicht um den Vorgang selbst. Damit sind wir auch über die Schwierigkeit, die raumlosen Raumgebilde uns bewegt zu denken, hinweg, denn in Wirklichkeit können wir uns einen abstrakten Raumteil, einen mathematischen Körper gar nicht in Bewegung denken, viel weniger noch eine Fläche, Linie oder einen Punkt. Wir können uns nur ein kongruentes Raumgebilde an einer andern Stelle des Raumes vorstellen; es handelt sich also in der Geometrie eigentlich nur darum ein bestimmtes Gebilde uns an einer bestimmten Stelle im Raume zu denken, an einer andern Stelle des Raumes, als an der, wo wir es erst betrachtet haben[1]). Da die mathematischen Raumgebilde, wie auseinandergesetzt ist, dem Gesetze der Undurchdringlichkeit nicht unterworfen sind, so können wir uns ferner an ein und derselben Stelle mehr als ein Raumgebilde denken, können in Gedanken Raumgebilde zur Deckung bringen (Kongruenz).

Von den Betrachtungen, die sich an diese Art der Bewegung knüpfen, vollständig verschieden sind nun diejenigen, die sich nicht mit Raumveränderungen, um uns kurz so auszudrücken, starrer Gebilde beschäftigen, sondern die Gebilde selbst in Bewegung sehen, so z. B. die Veränderungen, die mit einer Figur vor sich gehen, wenn wir ein Element derselben verändern. Diese letzteren Erwägungen geben uns eine Reihe von Sätzen als Grundvorstellungen aus der reinen Anschauung, die bisher eines weitläufigen Beweises für bedürftig angesehen wurden.

---

[1]) Nicht handelt es sich um eine Bewegung im eigentlichen Wortsinne, z. B. wenn gesagt wird, daſs ein Punkt eine Linie beschreibe, so haben wir uns das genau nicht so zu denken, daſs der Punkt sich von der Stelle bewege und nach und nach eine Reihe von Lagen annehme, — denn das ist ja nicht möglich, da der Punkt ja nichts ist, als eine Stelle, ein Ort im Raume — sondern wir betrachten in Wirklichkeit eine Reihe von unendlich vielen verschiedenen Punkten in ihrer Gesamtheit, indem wir sie in Gedanken zum Bild einer Linie zusammenfassen. Es erscheinen daher die Ausdrücke der neueren Geometrie Punktreihe und Träger der Punktreihe besonders glücklich gewählt.

Als hauptsächlichstes Merkmal der Bewegung geometrischer Gebilde hat jedenfalls zu gelten, dafs wir von der ursächlichen Kraft ganz abstrahieren, daher denn auch die Bewegung genau genommen nicht eine Bewegung der Objekte ist, sondern eine von dem denkenden Subjekt willkürlich dem geometrischen Gebilde substituierte Bewegung. Es wird später auf den Begriff der Bewegung noch tiefer eingegangen werden, hier mögen diese wenigen Bemerkungen genügen, um den Standpunkt des Verfassers im allgemeinen kurz zu charakterisieren.

Es folgen nun die Zitate:

August, L. d. M. I. — Berlin 1852.

„§ 1. Die Geometrie, d. i. Lehre von den Raumgröfsen, geht von gewissen Grundvorstellungen aus, welche im Bewufstsein eines jeden Menschen leicht hervorgerufen werden.

§ 2. Erste Grundvorstellung.

Die erste einfachste Grundvorstellung ist die des mathematischen Punktes, der sich von jedem noch so kleinen im Raume befindlichen Gegenstande dadurch unterscheidet, dafs er keinen Stoff und keine Gröfse, also auch keine Teile hat.

§ 3. Zweite Grundvorstellung.

Die zweite Grundvorstellung ist die der Linie, einer blofsen Länge ohne Breite, die man sich durch Bewegung eines Punktes im Raume, als Spur desselben, entstanden denken kann. [Wenn der in Bewegung gedachte Punkt seine Richtung nie ändert, so entsteht eine gerade Linie; wenn er nie dieselbe Richtung behält, so entsteht eine krumme Linie.]

§ 4. Dritte Grundvorstellung.

Die dritte Grundvorstellung ist die Fläche, welche Länge und Breite hat. Gewisse Flächen können durch Fortbewegung einer Linie entstanden gedacht werden. [Ist dabei die bewegte Linie eine gerade und wird sie so bewegt, dafs jeder ihrer Punkte wieder eine gerade Linie aber in einer andern Richtung bildet, so ensteht eine ebene Fläche oder Ebene. Eine Fläche ist krumm, wenn kein Teil derselben eben ist.]

§ 5. Vierte Grundvorstellung.

Die vierte Grundvorstellung ist die des geometrischen Körpers d. i. eines von allen Seiten begrenzten Raumes, der also ausser der Länge und Breite noch eine dritte Ausdehnung

in die Tiefe oder Höhe hat. Man gelangt zu der Vorstellung des mathematischen Körpers, wenn man sich von einem besondern physikalischen d. h. in der Natur ausser uns wahrgenommenen Körper den Stoff wegdenkt, so dafs nur noch die Gestalt im Raume zurückbliebe.

§ 6. Man sieht leicht ein, dafs die Grenzen eines geometrischen Körpers Flächen, dafs die Grenzen der Flächen Linien und die Grenzen der Linien Punkte sind."

Ich habe diese Auseinandersetzungen in dieser ausführlichen Weise angeführt, weil erstens der Gang hier gerade der entgegengesetzte des unsrigen ist, und zweitens weil uns dieselben als Typus einer grofsen Anzahl von Lehrbüchern dienen können. Es soll nun auf dieselben näher eingegangen werden.

Ad § 1. Der Ausdruck „leicht hervorgerufen werden" dürfte als ein glücklicher zu bezeichnen sein, wenn damit angedeutet werden soll, dafs die Grundvorstellungen a priori im menschlichen Bewufstsein vorhanden sind und nur der Weckung bedürfen; allerdings müfsten dann die Grundvorstellungen selbst andere resp. anders angeordnete sein als die vom Verfasser angegebenen.

Ich möchte diese Gelegenheit benutzen, um gleich hier — ohne den nachherigen Betrachtungen über Ebene und gerade Linie vorzugreifen — meine Ansicht auszusprechen, dafs Ebene und gerade Linie allerdings Grundvorstellungen sind d. h. a priori im menschlichen Bewufstsein vorhandene Vorstellungen, dafs aber die Verallgemeinerung dieser Ansicht auf Flächen und Linien überhaupt durchaus unstatthaft ist. Damit ist zugleich mein Standpunkt gegenüber den Augustschen Grundvorstellungen ausgesprochen.

ad § 2. August bezeichnet als einfachste Grundvorstellung die des mathematischen Punktes. Es stimmt das damit überein, dafs er den Punkt als Grundvorstellung überhaupt ansieht und diese Ansicht liefse sich wohl an und für sich nicht eben bestreiten. Aber wir gelangen zu den gröfsten Schwierigkeiten, wenn wir nun aus diesem einfachsten Grundbegriff die andern systematisch entwickeln wollen. Aufserdem erscheint es ungeheuer schwierig, wenn wir den Punkt als

einen Grundbegriff[1]) oder als eine Grundvorstellung annehmen, für diesen Begriff eine positive Definition zu finden. Überall da, wo der Punkt definiert wird, anders als aus dem Grenzbegriff der Linie, ist die Definition eine negative, wie wir aus verschiedenen der folgenden Zitate sehen werden. Damit liegt aber die Unzulänglichkeit der Definition zu Tage und mit der Definition zugleich fällt die Möglichkeit des Punktes als erste Grundvorstellung. — August fügt ferner Eigenschaften an, die er für Definition ausgiebt — nebenbei ein Fehler, den wir ausserordentlich häufig finden, und der hauptsächlich zur Verwirrung der Grundbegriffe beigetragen hat — Eigenschaften, die dem Punkte nicht allein zukommen. Was den Ausdruck betrifft „er hat keine Gröfse, also auch keine Teile“, so verweise ich auf meine obigen Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

ad § 3. Im allgemeinen gilt auch hier, was ich zur Definition des Punktes bemerkt habe. Ausserdem, was lässt sich wohl denken unter den Worten „eine blofse Länge ohne Breite“? Sind Länge und Breite hier als Qualitäten oder Quantitäten zu verstehen? Doch jedenfalls als Quantitäten, aber hier wird ja geantwortet auf die Frage, was ist eine Linie, wir könnten also nur eine Qualität bekommen, wenn es sich nicht um eine Definition handelte. — Die übrigen Worte des § 3 gehören in die Betrachtungen über die gerade Linie.

ad § 5. Aus den Worten des Verfassers „Man gelangt“ bis zum Schlufs des § geht hervor, dafs auch er die Vorstellung des Körpers allein für möglich hält, denn bei Punkt, Linie und Fläche hat er eine derartige Angabe, wie man zur Vorstellung des räumlichen Gebildes gelange, unterlassen. Dafs dies richtig ist, wenn auch August es nicht ausdrücklich ausspricht, geht auserdem auch daraus hervor, dafs es in der That nichts in der Natur aufser uns Wahrgenommenes giebt, bei dem wir durch Wegdenken des Stoffs zur Vorstellung der Fläche oder der Linie oder des Punktes gelangten. —

---

[1]) Dieser Ausdruck ist der genauere; denn nicht um Grundvorstellungen handelt es sich, sondern um Grundbegriffe. Der mathematische Punkt ist ein durch Abstraktion erhaltener Begriff, keine Vorstellung.

ad § 6. Was hier als eine Folge der vorhergehenden Betrachtungen hingestellt wird, ist, wie nachgewiesen, das Ursprüngliche der Betrachtung, die Grundlage. Nach den Ausführungen von August ist es gar nicht leicht einzusehen, dafs die Flächen die Grenzen der Körper sind etc., sondern man bringt bei dieser Betrachtungsweise zu dem Begriffe, resp. der Grundvorstellung Fläche etwas ganz neues hinzu, was nicht einmal als eine allgemein gültige Eigenschaft aufgefasst werden darf: sonst würden durch diesen § 6 nachträglich die Fläche und die übrigen Grundvorstellungen als unselbständig hingestellt.

Baltzer, Elem. d. Math. — Leipzig 1874.

„1. Der Raum ist ohne Unterbrechung und über jede Grenze hinaus ausgedehnt. Ein Ort im Raume ohne Ausdehnung gedacht, heifst ein Punkt. Ein Ausgedehntes ist entweder eine Linie, oder eine Fläche, oder ein Raum im engeren Sinne (Körper, *στερεόν*, solidum).

Auf einer Linie lassen sich unendlich viele Punkte unterscheiden, auf einer Fläche unendlich viele Linien, in einem Raume unendlich viele Flächen. Eine Linie ist zu beiden Seiten eines auf ihr liegenden Punktes ausgedehnt (in die Länge), eine Fläche ist zu beiden Seiten einer auf ihr liegenden Linie ausgedehnt (in die Länge und Breite[1]), ein Raum ist zu beiden Seiten einer in ihm liegenden Fläche ausgedehnt (in die Länge, Breite und Dicke); Linie, Fläche, Raum heifsen deshalb nach 1, 2, 3 Dimensionen ausgedehnt. Eine Linie kann als Bahn (Ort, *τόπος*) eines bewegten Punktes, eine Fläche als Bahn einer bewegten Linie, ein Raum als Bahn einer Fläche betrachtet werden.“

„2. Linien werden begrenzt durch Punkte (Endpunkte), Flächen durch Linien (Umfang, *περίμετρος*, *περιφέρεια*), Räume durch Flächen (Oberfläche, *ἐπιφάνεια*, superficies), und haben zwischen ihren Grenzen bestimmte Gröfse. Die Gröfse einer

[1]) Genau genommen dürfte doch nur gesagt werden, dafs die Fläche zu beiden Seiten der Linie nach der Breite ausgedehnt sei, denn die Ausdehnung nach der Länge ergiebt sich doch schon daraus, dass sie entlang der ganzen Linie nach beiden Seiten ausgedehnt ist.

Linie heifst ihre Länge, die Gröfse einer Fläche ihre Fläche (Fächeninhalt, area, *ἐμβαδόν*, *ἐπιφάνεια*), die Gröfse eines Raumes sein Volum (Körperinhalt, volumen, capacitas, *στερεόν*); diese Grössen werden extensive genannt im Gegensatz zu nicht ausgedehnten (intensiven) Gröfsen."

Baltzer geht also auch, wie es früher allgemein üblich gewesen zu sein scheint, vom Punkt aus und bezeichnet ihn als „einen Ort im Raume ohne Ausdehnung gedacht". Man findet diese Erklärung auch bei andren nicht gerade selten und fast ebenso oft die im wesentlichen mit ihr übereinstimmende Erklärung des Punktes als einer blofsen Stelle im Raume.

Es kann nicht geleugnet werden, dafs beide Erklärungen auf den ersten Blick etwas Bestechendes haben und als sehr glücklich gewählt erscheinen. Wenn man aber genauer darüber nachdenkt, so handelt es sich doch nur um ein Spiel mit Worten, eine vielleicht zur Anschaulichkeit dienende Erklärung, aber keine wirkliche Definition.[1])

Es geht mit dieser Erklärung wie mit den andern Erklärungen des Punktes — wenn man ihn nicht aus dem Grenzbegriff der Linie erhält — sie enthält ein negatives Moment, die Bestimmung „ohne Ausdehnung im Raume gedacht". Ob wir nun dafür Punkt oder Stelle oder Ort sagen, bleibt an sich gleichgültig, wir haben es hier nur mit verschiedenen Ausdrücken (Worten) zu thun, aber nicht mit wirklichen Sacherklärungen.

Bei dem Ausgedehnten unterscheidet Baltzer nicht sofort nach den Dimensionen, sondern führt als ganz gleich nebeneinander Linie, Fläche, Raum an. Ebenso tritt in dem folgenden Satz: „Auf einer Linie lassen sich unendlich viele Punkte unterscheiden, auf einer Fläche unendlich viele Linien, in einem Raume unendlich viele Flächen" die Existenz einer mehrfachen Mannigfaltigkeit gar nicht hervor. Auch sonst scheint mir dieser Satz nicht glücklich zu sein, oder wenigstens der Ausdruck „unterscheiden". Ich mufs offen gestehen, dafs ich mich ver-

---

[1]) Dafs man im Unterrichte z. B. die Schüler durch derartige Bemerkungen, wie blofser Ort, blofse Stelle, zu einer anschaulichen Vorstellung des Punktes hinzuleiten suche, erscheint mir durchaus erlaubt; nur dürfen sie nicht als wirkliche Erklärungen angesehen werden.

geblich bemüht habe zu finden, welchen Sinn es haben soll, z. B. auf einer Fläche lassen sich unendlich viele Linien unterscheiden. Vielleicht „denken"? Das Wort „unterscheiden" läfst fast den Gedanken aufkommen, als wenn die Fläche aus Linien zusammengesetzt sei.

Zu 2. möchte ich für eine schärfere Ausdrucksweise eintreten, die in den neueren Lehrbüchern auch fast allgemein gehandhabt wird, in den älteren aber fast durchweg vernachlässigt erscheint. Es ist der vielleicht bequeme, aber mifsverständliche Gebrauch des totum pro parte, Linie statt Teil der Linie (Strecke), Fläche statt Flächenteil (Feld), Raum für Raumteil (Körper).

Demnach müfste es dann heifsen, nicht „Linien werden begrenzt durch Punkte", sondern Linienteile werden begrenzt durch Punkte etc. Ebenso ferner: „Die Gröfse eines Linienteils heifst seine Länge" etc.[1])

Bartholomäi,[2]) Philosophie der Mathematik. p. 13. geht von den getrennten Dingen aus, deren Zusammenfassung den Begriff der Richtung hervorruft; aus dem letztern resultiert wiederum der Begriff der Distanz. Losgelöst von den Objekten wird die Distanz zu Null, verschwindet alle Ausdehnung, resultiert der Punkt.[3])

„Der Punkt ist also das absolut Einfache des Raumes, er ist räumlich, aber raumlos. Er ist blofs der Ort, den es einem Etwas darbietet, das leere Bild, an welches ein Ding angeheftet werden kann."

Vom Begriffe der Distanz (unendlich viele) gelangt Bartholomäi zum Begriffe des Körpers als des „Begriffes dessen, das nach allen Richtungen Distanzen zeigt."

Vom Körper gelangt er zum Grenzpunkt, deren Gesamtheit er die Grenze nennt. Diese wird näher erörtert. Dann heifst es: „Wird nun eine Grenze, welche vom Körper

---

[1]) S. oben.

[2]) Besprochen in Schl. Z. VI, 7.

[3]) Man vergleiche Kapitel V, worin ich mich ausführlich über die Begriffe Richtung und Abstand äufsern werde.

abhängig ist, von demselben losgelöst, so entsteht dasjenige Räumliche, welches nicht nach allen Richtungen Distanzen hat.“

Die philosophische Berechtigung dieser Betrachtungsweise möge hier unerörtert bleiben, für den Unterricht ist sie weder direkt, noch indirekt verwertbar, da hier zwei neue Begriffe vorausgesetzt werden, die in der Form, wie sie Bartholomäi giebt, jedenfalls für den Schüler unverständlich bleiben. Auch die Erklärung des Punktes leidet an schon bekannten Mängeln; der Zusammenhang aber der verschiedenen Raumgebilde ist in dieser Behandlung ganz aus dem Auge gelassen, Richtung, Distanz, Punkt, Körper, Fläche (und konsequenterweise weiter Linie, Punkt), wo liegt da der systematische Zusammenhang?

Beck, die ebene Geometrie nach Legendre. — Bern 1842. giebt die Erklärungen von Körper, Fläche, Linie und Punkt in dieser Reihenfolge ohne besonders Erwähnenswertes. Die Betrachtungsweise knüpft an die Grenzbegriffe an.

Becker, J. K., Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage.[1]) — Berlin 1877.

„Was wir als im Raume befindlich uns vorstellen oder wirklich darin wahrnehmen,[2]) ist entweder ein Körper, eine Fläche, eine Linie oder ein Punkt.“

„Unter Körper verstehen wir einen allseitig begrenzten Teil des Raumes (einerlei, ob er mit Materie erfüllt oder leer ist). — Fläche heifst eine Stelle im Raume, die einen Teil desselben vom übrigen absondert, also z. B. die Grenze eines Körpers (dessen Oberfläche). Die Stelle, in der eine Fläche geteilt oder begrenzt wird, heifst Linie. Eine Linie endlich wird vom Punkte geteilt und begrenzt. Dieser ist selbst nicht mehr ausgedehnt, und wenn man von der Linie, welche er

---

[1]) Eine ausführliche Besprechung findet sich in H. Z. VIII. p. 411—420. — Dem Buche wird eine weite Verbreitung gewünscht. — Vergleiche: Beckers Replik in H. Z. IX, p. 17—20.

[2]) Dafs wir eine Fläche, Linie oder Punkt als wirklich im Raume befindlich wahrnehmen könnten, ist wohl zu viel behauptet.

begrenzt, abstrahiert, kann in ihm nichts mehr gedacht werden als eine ausdehnungslose Stelle im Raume oder an einem Raumgebilde, die sich von einer andern derselben Art nur noch der Lage nach unterscheiden kann."

Es werden dann noch die drei Dimensionen entwickelt.

Man sieht Becker hat sich förmlich auf den Ausdruck „Stelle" kapriziert, in allen Erklärungen finden wir diesen vor. Wie schon oben erwähnt, scheint mir dadurch die eigentliche Schwierigkeit der Sacherklärung bei den Grundbegriffen mehr umgangen als gelöst, nun gar wenn wir das Wort Stelle auch bei der Definition von Fläche und Linie verwenden; denn die Stelle ist hier gar nicht denkbar ohne dafs man schon eine Vorstellung von Fläche und Linie hat.[1]) Stelle und Punkt sind identisch, aber, wenn wir eine Fläche als eine Stelle bezeichnen, so wird dabei die Vorstellung (Begriff) der Fläche vorausgesetzt, denn es handelt sich hier um eine Form der Stelle, etwas was an und für sich gar nicht im Begriff Stelle liegt. Ich erinnere an meine obigen Ausführungen über den Punkt; wie man bei ihm (d. h. bei der Stelle *κατ' ἐξοχήν*) von jeder Form oder Gestalt abstrahiert, — denn mit dem Begriff der Form oder Gestalt ist unerlässlich die Vorstellung der Ausdehnung verbunden — also nicht von einem vieleckigen oder runden Punkt sprechen darf, ebensowenig ist es möglich die Stelle mit Linie oder Fläche zu identifizieren, weil wir damit der Stelle eine Form geben würden.

Becker fährt fort:

„§ 2. Nicht der Teil des Raumes oder die Stelle in demselben, als welche uns ein Körper, eine Fläche oder Linie erscheint, ist Gegenstand geometrischer Betrachtung, sondern die Gestalt (Figur), unter der dieser Raum begrenzt oder jene Stelle im Raume ausgedehnt erscheint."

Auch diese Erklärung mufs mit gewisser Vorsicht aufgefafst werden, scheint es doch fast, als wenn Stelle und Raumteil identifiziert würden, was jedenfalls nicht geschehen darf.[2])

---

[1]) Oder genauer ausgedrückt, dafs wir uns des Begriffes Fläche etc. klar bewufst sind.

[2]) Denn die Stelle ist ausdehnungslos, direkte Negation des Raumes.

Becker, J. K.,[1]) Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Berlin 1877.

p. 4. Flächen, Linien und Punkte können nicht nur an Körpern, als deren Grenzen, wahrgenommen, sondern auch selbständig als Stellen (Örter) im Raume gedacht werden.

Behl, Darstellung der Planimetrie nach induktiver Methode. Hildesheim 1886.

„Denkt man sich einen beliebigen Teil des Raumes allseitig begrenzt, so wird dieser allseitig begrenzte Teil des Raumes „Körper" genannt. Während der Raum eine Bewegung nach unendlich vielen Richtungen (Dimensionen) gestattet, fasst man bei den Körpern diese unendlich vielen Richtungen in drei zusammen, nämlich in Länge, Breite und Höhe."

„Die Begrenzungen der Körper sind die Flächen. Diese sind aber nicht als zu den Körpern gehörig zu betrachten, sondern sie sind etwas für sich selbst Bestehendes.[2]) Während die Körper nach drei Dimensionen ausgedehnt sind, tritt bei den Flächen eine Dimension zurück, sie sind nur nach zwei Dimensionen ausgedehnt, nach der Länge und Breite. Die Grenzen der Flächen sind die Linien . . . . . ."

„Der mathematische Punkt ist nur etwas Gedachtes; er existiert nur in der Vorstellung."

Behl läſst vollständig im Unklaren, wie man von den unendlich vielen Richtungen im Raume zu den drei Richtungen des Körpers gelangt, warum man gerade drei herausgreift.[3])

---

[1]) Man vergleiche auch: Becker, J. C., Die Grundlagen der Geometrie. — Schl. Z. XX. 445. — und: Becker, J. C., Über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume. — Schl. Z. XVII, 314; besprochen ist das Werk in H. Z. X. p. 422—427.

[2]) Das ist doch per primum nicht richtig.

[3]) Auch ist die gewählte Ausdrucksweise geeignet, zu irrtümlicher Auffassung zu verleiten. Nicht nur im Körper ist von einem Punkte aus eine Bewegung nach unendlich vielen Richtungen möglich, sondern sogar auch noch in der Fläche. Eine genauere Untersuchung würde auf den Unterschied von einfacher und mehrfacher Unendlichkeit (Mannigfaltigkeit) Bezug nehmen müssen. Jedenfalls ist auch noch in der Fläche eine Bewegung nach unendlich vielen Richtungen möglich.

Hier ist offenbar eine Lücke in der Erläuterung, wodurch allerdings eine Schwierigkeit leicht übersprungen wird. Wenn Behl sagt, dafs die Flächen nicht als „zum Körper gehörig zu betrachten“ sind, so meint er wohl, dafs sie nicht als Teile des Körpers aufzufassen sind. Denn de natu gehören die Flächen allerdings zum Körper und sind nicht ursprünglich, wie Behl sagt, als „etwas für sich selbst Bestehendes“ aufzufassen, so wenig wie Linien und Punkte. Schliefslich sagt Behl vom Punkte, er sei nur etwas Gedachtes, er existiere nur in der Vorstellung: gilt denn von mathematischen Körpern, von der Fläche und Linie etwas anderes? Existieren diese etwa wirklich? Sie sind doch ebenso wie der Punkt nur etwas Gedachtes und existieren, wie der Punkt, auch nicht einmal in der Vorstellung.[1]) Der Punkt steht in seinem Verhältnis zur menschlichen Vorstellung auf derselben Stufe wie Flächen und Linien, sie sind allesamt unvorstellbar, weil keine reellen Bilder derselben existieren; anders ist es mit dem mathematischen Körper.

Brewer, Lehrbuch der Geometrie — Düsseldorf 1822.

Nach der üblichen Erklärung vom Körper und dem Übergang zur Fläche als der Grenze des Körpers fährt Brewer fort:

„Die Schwierigkeit, welche die Anfänger bei dem Begriffe der geometrischen Fläche finden, rührt daher, dafs sie sich dieselbe abgesondert von dem Körper, unter irgend einem körperlichen Bilde vorstellen wollen.

Allein es ist unmöglich, sich dasjenige unter einem körperlichen Bilde vorzustellen, dessen Wesen darin besteht, dafs es kein Körper ist. Die geometrische Fläche ist wirklich, aber nur an den Körpern; sie läfst sich ebensowenig von dem Körper trennen, als sich die Grenze vom Begrenzten trennen läfst.“

„Legt man zwei genau abgeschliffene Lineale mit der flachen Seite aufeinander, so werden sie sich überall berühren; das, was sie trennt, ist eine geometrische Fläche im strengsten Sinne des Wortes.“[2])

---

[1]) Wenn sie als selbständige Gebilde aufgefasst werden.

[2]) Man vergleiche das oben angeführte Beispiel von Wasser und Öl in einem Gefäfse.

„Obschon wir durch keines unserer Werkzeuge eine geometrische Linie abgesondert von der Fläche darstellen können, so giebt es doch an den von uns physisch dargestellten Linien wirklich geometrische, z. B. die linke oder rechte Seite einer Bleistiftlinie ist eine geometrische Linie.“[1])

Dronke, Die Elemente der ebenen Geometrie. — M.-Gladbach, — geht vom Punkte aus, der „keine Ausdehnung, sondern nur eine Lage im Raume“ hat.[2])

Ebensperger, Leitfaden der Geometrie. — Nürnberg 1850. — entwickelt die Raumgebilde vom Körper[3]) ausgehend, als Grenzen. — Er fährt dann fort:

§ 4. „Körper, Flächen und Linien können vergröfsert und verkleinert werden und sind also Gröfsen. Der Punkt, welcher nicht vergröfsert oder verkleinert werden kann, ist demnach keine Gröfse; er kann nur gedacht werden[4]) und bezeichnet blofs eine Stelle im Raume.“

Euklid, Elemente. — ed. Dippe. Halle, — geht bekanntlich vom Punkte aus, den er definiert:

„Ein Punkt ist, was keine Teile hat.“ Dafs diese Definition ungenügend und unhaltbar, ist schon daraus erwiesen,

---

[1]) Die Darstellung Brewers stimmt mit meinen Ausführungen im wesentlichen überein; auch hier wird der Hauptpunkt der Schwierigkeit darin gefunden, dafs eben nur Körper vorstellbar sind und dafs alle vermeintlichen Vorstellungen von Flächen, Linien und Punkten nichts anderes als körperliche Bilder oder stellvertretende Vorstellungen sind.

[2]) Die Definition des Punktes ist nicht ohne Geschick umgangen.

[3]) Der definirt wird als: „eine Gröfse, welche nach drei Richtungen ausgedehnt ist.“ „Ein physischer Körper ist zugleich ein geometrischer, aber nicht umgekehrt.“ — Diese Bemerkung ist recht gut.

[4]) Flächen und Linien können auch nur gedacht werden. — Darauf dafs Flächen und Linien nicht ganz beliebig — nach allen Richtungen — vergröfsert resp. verkleinert werden können: auf diese Hauptschwierigkeit, die zugleich die Raumgebilde als Gröfsen ganz besonderer Art charakterisiert, wird nicht eingegangen.

dafs sie nur ein negatives Moment enthält, das aufserdem dem Punkt nicht einmal allein zukommt. Ebenso sind die folgenden Definitionen von Linie und Fläche wenig klar, aber es ist hier, wie ich in der Einleitung hervorgehoben, zu bedenken, dafs Euklids Elemente sicher kein Schulbuch sein sollten, sondern für schon ausgebildete Mathematiker bestimmt waren. Inwiefern die Erklärungen in dieser Hinsicht zu beurteilen sind, möge hier unerörtert bleiben.

Kober spricht sich in einem Aufsatz in der Hoffmannschen Zeitschrift, Band I, p. 228—236 über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe aus, den er mit folgenden Worten einleitet: „Die Geometrie soll durch die Schärfe ihrer Entwicklungen den übrigen Wissenschaften als Muster dienen; es ist also vom wissenschaftlichen, wie ganz besonders vom pädagogischen Standpunkte unabweisbare Forderung, dafs alle Sätze und Erklärungen vollkommen klar gedacht und korrekt ausgedrückt, dafs die ersten Grundwahrheiten zur vollen Evidenz und geistigen Befriedigung des Schülers gebracht werden müssen."

Es werden dann folgende Definitionen des Punktes verworfen: 1. „Ein Punkt ist, was keine Teile hat" (Euklid).

Kober wendet sich gegen diese Definition erstens wegen ihrer sprachlichen Unvollkommenheit und zweitens wegen ihrer Inhaltsleere, da sie viel zu allgemein ist. Es heifst dann weiter: „Ferner spricht diese Definition eine blofse Negation aus; bevor man aber negieren kann, mufs man Vorstellung und Begriff haben von dem, was man negiert, man müfste also hier die teilbaren geometrischen Gebilde bereits kennen."

2. „Ein Punkt ist, was keine Ausdehnung hat."

3. „Punkt ist, was keine Gröfse hat."

Diese Definitionen sind im wesentlichen mit denjenigen Euklids identisch und unterliegen daher denselben Einwendungen.[1])

Auch Hoffmann selbst widmet in seiner Zeitschrift unter dem Titel: Die Prinzipien des 1. Buches von Euklids Elementen,

---

[1]) Man vergleiche: Friedlein, Untersuchung der sogenannten Definitionen Hero's, in H. Z. II. p. 180.

den Grundbegriffen ausführliche Betrachtungen,[1]) aus denen hier das Wesentlichste wiedergegeben werden soll. Zuerst handelt es sich um die Euklidische Definition des Punktes. „Dies ist eine Definition mit verneinender Bestimmung, sie ist also fehlerhaft; sie sagt nur was der Punkt nicht ist, aber nicht was er ist.

„Überdies ist die Definition in Ermangelung des Gattungsbegriffes zu weit. Vergl. Drobisch Logik § 119, 4.“ In einer längeren Anmerkung polemisiert Hoffmann bei dieser Gelegenheit gegen „die gangbare Ansicht, dafs der Punkt ohne Ausdehnung und Gestalt“ sei, entsprechend seinen Ausführungen in der Vorschule.[2]) — Dann wird Euklids Definition der Linien besprochen. Hoffmanns Bemerkung, dafs „die Erklärung so klingt, als gäbe es auch eine Linie mit Breite“ scheint mir nicht zuzutreffen, dagegen ist es richtig, wenn er sagt: „Wenn dem Begriff Linie das Merkmal Breite überhaupt und schlechterdings nicht zukommt, dann hat es keinen Sinn, dieses Merkmal im Denken wegzunehmen, es zu negieren.“

Die spätere Definition Euklids, die Grenzen der Linien sind Punkte, erkennt Hoffmann zwar als positiv an, spricht ihr aber die Berechtigung ab, „da sie nur erkläre, was ein Ding (Punkt) an einem andern (Linie) oder in Beziehung auf ein andres ist, nicht aber, was es an sich sei.“ Hieran schliefsen sich unter Berufung auf Trendelenburg Bemerkungen gegen die „gangbare Ansicht“, die die Raumgebilde (nur) als Grenzen auffafst. Besonders stehe dieser Auffassung die Erzeugung von Gebilden durch Bewegung entgegen.[3]) Es heifst gegen Ende des Artikels: „Zuvörderst fehlt Euklid die metaphysische Grundlage, die Entwicklung der Eigenschaften des Raumes, ohne welche in unserer Zeit ein Grundlegung der Geometrie gar nicht mehr möglich ist.“

Speziell mit dem Punkt beschäftigt sich auch eine kleinere

---

[1]) H. Z. III. p. 114—143. — Man vergl. den offenen Brief E. Müllers an Hoffmann in H. Z. III. p. 370—375. — ferner Hoffmann: Zu den geometrischen Grundbegriffen; in H. Z. XVI. p. 339/42.

[2]) Man vergleiche das betreffende Zitat und meine Anmerkungen dazu.

[3]) Man vergleiche meine eigenen Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

Abhandlung von Fresenius,[1]) worin er „Rechenschaft ablegt über den Gedankengang, der ihn zu folgender Definition des Punktes verleitet hat“:

„Er (der Punkt) ist im Raume das objektive Abbild der im Subjekt empfundenen Unteilbarkeit des Bewufstseins.“ Als entscheidend bezeichnet Fresenius die Beantwortung der Frage: „Welchen Einflufs auf die Art, wie uns die ganze Aufsenwelt erscheint, hat der subjektive, der Einzelstandpunkt, den das Ich einnimmt?“ Der Artikel schliefst mit den Worten: „der obige Satz ist allerdings keine Definition des Punktes. Aber dafs dieser Satz die Erklärung enthalten dürfte, wie wohl einzig eine so bestimmte und allgemein anerkannte Thatsache eines Orts im Raume, der absolut keinen Teil des Raumes ausmacht, in unser Bewufstsein gelangen konnte, das mufs ich noch immer festhalten. Einer Definition im strengen Sinne scheint mir allerdings, wie gesagt, der Punkt nicht fähig zu sein. Sie wäre Abgrenzung von Dingen gleicher Gattung. Er aber gehört wohl zu keiner Gattung, sondern ist sui generis und ein Ursprüngliches.“

Fabian,[2]) Lehrbuch der Mathematik. — Lemberg 1876, sagt vom Punkt „er bildet keinen Teil des Raumes und besitzt keine Ausdehnung.“ Da diese Bemerkung bei den Flächen und Linien nicht gemacht wird, so mufs angenommen werden, dafs Flächen und Linien nach der Ansicht Fabians Teile des Raumes bilden, d. h. nach der eigenen Erklärung Fabians Körper. Das ist doch ein arger Widerspruch. Man sieht, dafs man bei den Grundbegriffen ungeheuer vorsichtig sein mufs, da selbst durch eine Auslassung oder durch einen

---

[1]) In H. Z. IV. p. 350—354. — Man vergleiche: Fresenius: Die Raumlehre, eine Grammatik der Natur. Entwurf zu einer genetischen Schulmethode der Elementargeometrie. — Besprochen in H. Z. VII. p. 64—67. — Es heifst in der Rezension: „Nirgends wird definiert, nur angeschaut,“ und an einer andern Stelle: „Der Verfasser ist kein wissenschaftlicher Skrupulant, sondern nimmt diese Definitionen (der aus der Anschauung abgeleiteten Begriffe von Körper, Fläche, Linie, Punkt) einfach, wie sie sich dem beschauenden Geiste ergeben.“

[2]) Besprochen in H. Z. VII. p. 296—299.

an sich richtigen Zusatz ein Mifsverständnis hervorgerufen werden kann.

Dafs Fabian dies nicht wirklich so verstanden wissen wollte, geht aus einer späteren Stelle hervor, wo er sagt: „Ein Punkt kann aus keinem Stoffe gemacht, er kann nur gedacht werden.“ „Ebensowenig kann eine Linie aus einem Stoffe gemacht oder auch nur gezeichnet werden. Man kann sie nur in Gedanken begreifen.“[1])

Féaux, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Paderborn 1882. — geht vom Punkte aus und läfst die übrigen Gebilde durch Bewegung entstehen, ohne überhaupt auf die Grenzbeziehungen einzugehen. Bei der Definition des Punktes fügt er hinzu „der Punkt ist in der Raumlehre gleichsam das, was die Null in der Zahlenlehre ist.“ Ob diese Anmerkung eine glückliche ist und dieser Vergleich geeignet, den Begriff Punkt klarer zu machen, scheint mir doch zweifelhaft, wenn auch die Berechtigung eines derartigen Vergleiches anerkannt werden soll.[2])

Frischauf,[3]) Elemente der Geometrie. — Graz 1870.

„Da die Fläche Grenze eines Körpers ist, so hat sie zwei Seiten,[4]) eine gegen den Körper zugewandte und eine von demselben abgewandte. Dasselbe gilt auch von der Linie

---

1) Die Bezeichnung der räumlichen Gebilde als Begriffe unserers Denkens ist die allein richtige; der falsche Ausdruck Vorstellungen — der aus Bequemlichkeit vielleicht mehr, als aus wirklicher Überzeugung meist angewendet wird, — sollte möglichst vermieden werden.

2) Doch müfste diese Vergleichung schon oder auch bei Fläche und Linie angestellt werden.

3) Besprochen in H. Z. II. p. 57—61.

4) Man vergleiche hierzu meine Ausführungen über den Begriff der Seite bei den Flächen, Linien und Punkten. — Was man sich unter den beiden entgegengesetzten Seiten eines Punktes zu denken habe, ist mir unklar. Bei der Fläche ist diese Betrachtung ja in gewissem Sinne richtig — wenn man sich des eigentlichen Begriffes Seite bewufst ist, wird man vor falscher Auffassung bewahrt — aber bei Linie und Punkt verliert sie jede Berechtigung: wenigstens dürfte man dann doch nicht von den beiden entgegengesetzten Seiten sprechen.

und dem Punkte. Diese beiden Seiten werden entgegengesetzte Seiten genannt."

Während zuerst die räumlichen Gebilde aus dem Begriff der Grenze entwickelt werden, wird dann auch ihre Erzeugung durch Bewegung angegeben.

Gauss, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. — Bunzlau 1885.

„Der Raum ist teilbar. Dasjenige, was einen Teil des Raumes von dem andern trennt, heifst eine Fläche."

„Jede Fläche ist teilbar. Dasjenige, was einen Teil der Fläche von dem andern trennt, heifst eine Linie."

„Jede Linie ist teilbar. Dasjenige, was einen Teil einer Linie von dem andern trennt, heifst ein Punkt."

„Jeder Punkt ist unteilbar."

„Die beiden Teile einer Linie, welche durch einen Punkt voneinander getrennt werden, heifsen die Seiten des Punktes. Die Linie erstreckt sich zu beiden Seiten des Punktes in die Länge; sie hat eine Dimension: Länge."

Analog wird denn auch für Linien und Flächen der Ausdruck „Seiten" gebraucht; jedenfalls ein eigentümlicher Gebrauch, der sich wohl kaum empfehlen dürfte.[1])

Gernerth, Grundlehren der ebenen Geometrie. — Wien 1857.

Nach Betrachtung der Flächen etc. als Grenzen heifst es, „die Grenzen einer Raumgröfse geben nur an, wo diese Raumgröfse ihr Ende hat, ohne selbst ein Teil dieser Raumgröfse zu sein. Daraus folgt: „Es kann kein Teil eines Körpers eine Fläche, kein Teil einer Fläche eine Linie, kein Teil einer Linie ein Punkt sein, weshalb sich auch aus Flächen kein Körper, aus Linien keine Fläche, aus Punkten keine Linie zusammensetzen läfst."

Die Entstehung der höheren (mehrfach dimensionalen) Gebilde durch Bewegung der um 1 niederen wird dann noch

[1]) Man vergleiche die vorhergehende Anmerkung.

ausführlicher besprochen; auch auf die Versinnlichung (Versinnbildlichung) wird genauer eingegangen.[1])

Gilles, Lehrbuch der ebenen Geometrie.[2]) — Heidelberg 1877.

Wir finden bei Gilles die Grenzenbetrachtung ganz bei Seite gelassen und nur die Entstehung der Gebilde durch Bewegung behandelt. Hierbei zeigen sich verschiedene von dem gewöhnlichen Gang abweichende Ansichten, so dafs sie hier ihre Stelle finden müssen.

„Die beginnende Bewegung ist der Punkt.[3]) Derselbe hat keine Ausdehnung. Durch die Bewegung des Punktes entsteht die Linie. Dieselbe hat eine Ausdehnung, welche Länge heifst. Obwohl aber die Linie durch die Bewegung des Punktes entsteht, besteht sie doch nicht aus Punkten, da das Ausdehnungslose nicht durch Summierung ein Ausgedehntes werden kann.[4]) Bei der Entstehung der Linie finden wir, dafs die Bewegung, wodurch dieselbe entsteht, eine dreifache Thätigkeit ist:[5]) die erzeugende, die zusammenfassende und die zu-

---

[1]) So heifst es z. B.: „Auf dem Papiere versinnlicht man Punkte entweder durch sehr feine Stiche mit einer Zirkelspitze oder einer Punktiernadel, oder durch sehr kleine Flecke von Tinte, Tusch oder Bleistift.. Dafs solche Stiche oder Flecke und Striche nicht wirkliche Punkte und Linien sind, ist klar; denn wenn sie auch noch so klein und fein sind, so haben die ersteren doch eine, wenn auch sehr kleine Ausdehnung in die Länge, Breite und Dicke, ... weil sie sonst nicht sichtbar sein könnten."

[2]) Besprochen in H. Z. IX durch Scherling. Es heifst darin: „Überhaupt können wir uns mit der Entwicklung der Raumgebilde, wie sie der Verfasser giebt, nicht einverstanden erklären."

[3]) Sowohl dieser Ausdruck, wie einige der folgenden, sind wenig glücklich gewählt. Was soll das heifsen, der Punkt ist die beginnende Bewegung? Hier werden zwei voneinander ganz verschiedene Begriffe vermengt, zu dem Begriffe Punkt etwas ganz Neues, mit ihm gar nicht in Verbindung Stehendes hinzugethan.

[4]) Vergl. oben Féaux.

[5]) Auch dieser Ausdruck: die Bewegung ist eine dreifache Thätigkeit, dürfte kaum berechtigt und geeignet sein, Mifsverständnisse hervorzurufen. Vielleicht steckt jedoch ein richtiger Kern darin, wenn

rückwirkende Thätigkeit. Die erzeugende Thätigkeit würde für sich allein immer nur einen Punkt in wechselnder Lage liefern. Erst durch zusammenfassende Thätigkeit, durch welche die verschiedenen Lagen festgehalten werden, entsteht das ausgedehnte Gebilde. Die zusammenfassende Thätigkeit ist nicht möglich ohne Rückbewegung, durch welche auch das Gebildete begrenzt wird."[1])

Heinze, Elementar-Geometrie. — Berlin 1877.

Heinze verzichtet auf Definition von Körper, Fläche, Linie im allgemeinen, indem er den Körper gar nicht erwähnt, von Flächen nur die Ebene, von Linien nur Gerade und Kreis. An die Spitze seiner Geometrie stellt er den Lehrsatz: „Der Ort, in welchem ein allmählich abnehmendes Ding aufhört Raum einzunehmen, ist der geometrische Punkt."[2])

Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie.[3]) — Leipzig 1881.

Fläche, Linie und Punkt werden aus dem Grenzbegriff entwickelt, wobei aber der Begriff der Seite wieder fälschlich gebraucht wird. Dann heifst es weiter:

„Die Geometrie betrachtet jedoch die geometrischen Gebilde nicht blofs als Grenzen, sondern losgelöst voneinander und willkürlich zu geometrischen Figuren zusammengestellt. Wir können nämlich diese Gebilde auch, vom Punkte ausgehend, entstehen lassen oder entstanden denken durch Be-

---

nämlich der psychologische Vorgang beim betrachtenden Subjekte dadurch zergliedert werden soll.

[1]) Die zurückwirkende Thätigkeit bei der Auffassung der Bewegung dürfte doch wohl mit der zusammenfassenden identisch sein.

[2]) Schon in dem Vorwort bedient sich Heinze dieses Ausdrucks und fügt hinzu: „Bei jedem körperlichen Dinge, das auf dieselbe Weise, bis es verschwindet, abnimmt, erhält man denselben geometrischen Punkt wieder; er ist also ein identischer." Die Ableitung des Punktes aus der Grenzbetrachtung wird ausdrücklich als falsch bezeichnet. Es wird dann noch gezeigt, dafs man überall einen geometrischen Punkt annehmen oder setzen könne und auf die Bezeichnung der Punkte eingegangen.

[3]) Besprochen in H. Z. XIII. p. 220/22 und XVI. p. 33/41.

wegung. Da wo ein Gebilde ruht ist seine Stelle; wenn diese in Bezug auf ein anderes Gebilde bestimmt wird, heifst sie seine Lage."

Bei der genaueren Betrachtung der Gebilde durch Bewegung entstanden heifst es unter anderem:

„Denkt man sich einen Punkt stetig bewegt und fafst man die Lagen, in welchen er sich nacheinander befindet, alle zusammen, so gewinnt man die Vorstellung einer Linie: unter Linie versteht man also die Gesamtheit der Lagen eines bewegten Punktes, den sog. geometrischen Ort desselben."[1])

Hoch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Halle 1884.

Nach der Erklärung von Flächen etc. als Grenzen heifst es:

„Die Körper, Flächen und Linien sind die einzigen im Raume ausgedehnten Dinge und heifsen daher Raumgröfsen." „Die Körper, Flächen und Linien können nach Gestalt, Gröfse und Lage miteinander verglichen werden. Die Punkte jedoch, als Grenzen von Linien, haben keine Gestalt und Gröfse, können demnach nur in Bezug auf ihre Lage miteinander verglichen werden."

„Hinterläfst ein Punkt bei seiner Bewegung eine Spur, so erzeugt er eine Linie" etc.

Hoffmann, J. C. V.,[2]) Vorschule der Geometrie. — Halle 1874 sagt unter anderem, indem er den Grundbegriffen sehr ausführliche Betrachtungen widmet:

---

[1]) Darauf, dafs genau genommen ein Punkt überhaupt nicht in Bewegung gedacht werden kann, wird gar nicht eingegangen. Nicht die Gesamtheit der Lagen eines und desselben Punktes giebt den geometrischen Ort, sondern die Gesamtheit aller verschiedenen Punkte, die einer bestimmten Bedingung genügen. Ebenso entsteht die Linie nicht durch Bewegung eines Punktes, sondern dadurch, dafs das denkende Subjekt eine Vielheit von verschiedenen Punkten als einheitliches Gebilde erfafst; die Punktreihe wird in Gedanken identifiziert mit ihrem Träger, der Linie. Man vergleiche weiter oben die kurzen Bemerkungen über Bewegung und später den Artikel „Bewegung".

[2]) Besprochen in H. Z. V. p. 237—243.

„Willst du dir aber die Fläche abgesondert vom Körper (isoliert) vorstellen, so kann sie dir schon ein feines Papierblatt veranschaulichen; denke dir aber die Dicke desselben, die doch ohnehin schon sehr gering ist, so unermeſslich (unendlich) klein, daſs, wenn man sie noch kleiner oder das Blatt noch dünner machen wollte, die ganze Fläche verschwinden (oder der Null gleich werden) würde (man sagt auch, die Dicke grenzt an Null). Man nennt dieses „unendlich dünn machen" in der Gröſsenlehre „von der Dicke abstrahieren" (sie wegdenken)."[1])

Ähnliche Betrachtungen stellt H. bei der Linie und dem Punkt an. Bei dem letzteren fügt er noch hinzu „er (der Punkt) ist gewissermaſsen der Keim (Embryo) der Linie."[2]) Ferner: „Hat er Ausdehnung? Nur die kleinstmögliche." „Er hat die Ausdehnung eines Atoms. Sonst — wäre er ein reines Nichts."[3])

„Das anschauliche und bewegbare[4]) Bild eines solchen

---

[1]) Die Ausführungen Hoffmanns müssen mit groſser Vorsicht aufgenommen werden. Soll der Begriff Fläche erläutert werden, so sind sie entschieden falsch, ebenso wie die Bemerkung, daſs „von der Dicke abstrahieren" bedeute „unendlich dünn denken". Soll dagegen die Vorstellbarkeit geschildert werden, so können die Bemerkungen von Nutzen sein; immer aber hätte hervorgehoben werden müssen, daſs auch dieses unendlich dünn gedachte Blatt in Wahrheit noch einen Körper repräsentiere, und daſs es sich auch in diesem Falle nur um ein Veranschaulichen handle. Selbst in einer Vorschule der Geometrie muſs auf diesen wesentlichen Unterschied von unendlich dünn und Null eingegangen werden, da durch ihre Gleichsetzung von vornherein falsche Vorstellungen hervorgerufen werden.

[2]) Auch diese Bemerkung ist entschieden falsch; denn wenn der Punkt der Keim der Linie genannt wird, so geht daraus hervor, daſs wir durch Zusammensetzung von Punkten eine Linie erhalten, was dann konsequenter Weise dazu führen würde, aus Linien Flächen und aus Flächen Körper zusammenzusetzen. Man vergleiche meine obigen Ausführungen über die Elemente der geometrischen Gebilde.

[3]) Das ist er auch, ebenso wie in gewisser Hinsicht Flächen und Linien auch. — Zudem hätte der Punkt diese kleinstmögliche Ausdehnung doch nach allen Richtungen, er hätte drei Dimensionen, d. h. das was uns hier geschildert wird, ist ein unendlich kleiner Körper, aber kein Punkt.

[4]) Auch dies widerspricht meiner Auffassung — die übrigens von

unteilbaren Raumpunktes in deiner Vorstellung ist der ideal-mathematische Punkt."[1])

In zwei besonderen Abschnitten geht dann H. noch genauer ein auf die Erzeugung der *n*fach ausgedehnten Gebilde durch Bewegung eines (*n* — 1)fach ausgedehnten, sowie umgekehrt auf die Erzeugung der *n*fach ausgedehnten Gebilde durch die Annahme, dafs eine der Dimensionen des (*n* + 1)fach ausgedehnten Gebildes zu Null wird oder vielmehr sich der Grenze 0 nähert. Er sagt: „Nur darfst du die Begrenzungselemente (Fläche, Linie[2])) nicht bis zum völligen Verschwinden abnehmen lassen, weil du sonst ein Nichts (eine Null) erhältst, sondern du darfst sie nur abnehmen lassen sozusagen bis zur Schwelle des Verschwindens."[3])

Kambly,[4]) Die Elementar-Mathematik. II. — Breslau 1884.

Der Gang der Betrachtung ist der naturgemäfse. Dann wird noch hinzugefügt: „Es besteht also der Körper nicht aus Flächen, die Fläche nicht aus Linien, die Linie nicht aus Punkten. Wohl aber entsteht ein Körper durch Bewegung einer Fläche, eine Fläche durch Bewegung einer Linie, eine Linie durch Bewegung eines Punktes."

„Eine Linie ist demnach der Weg eines sich bewegenden Punktes."

Kober[5]) giebt die beiden Ableitungen der räumlichen Gebilde 1) aus dem Grenzbegriff, 2) aus der Bewegung.[6])

---

sehr Vielen ebenfalls ausgesprochen wird. Vergl. die Bemerkung zu Henrici und Treutlein.

[1]) Nicht der Punkt ist ein Bild von einer Vorstellung, sondern gerade umgekehrt die Vorstellung des Punktes ein Bild des Begriffes Punkt.

[2]) Warum nicht auch Punkt?

[3]) Man vergleiche meine früheren Bemerkungen zu Hoffmanns Vorschule.

[4]) Besprochen in Schl. Z. IV, 21 und in H. Z. VI, 304. Vergl. H. Z. VII. p. 449—459. — Ferner H. Z. IX. 190—194.

[5]) J. Kober, Leitfaden der ebenen Geometrie. — Besprochen in H. Z. V. p. 446—449.

[6]) Man vergleiche J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. — H. Z. I. p. 228—236.

Köstler, Vorschule der Geometrie. — Halle 1887. — Desgleichen.

Köstler, Leitfaden der ebenen Geometrie. — Halle 1889. — Desgl.

Kommerell, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Tübingen 1882.

„Jeder Körper wird von Flächen begrenzt."

„Wo zwei Flächen sich begegnen, entsteht eine Linie; Linien bilden demnach die Grenzen der Flächen."

„Durch den Schnitt von Linien entstehen Punkte."

Kries, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Jena 1817 behandelt Flächen und Linien durchaus als selbständige Gebilde.

„Es ist aber nicht notwendig, sich bei Gegenständen der Ausdehnung jedesmal alle drei Abmessungen in Verbindung vorzustellen. Wir können von einzelnen Abmessungen abstrahieren."

So gelangt K. durch Abstraktion zum Begriff der Flächen und Linien, ohne sie in Verbindung mit dem Körper, d. h. als Grenzen des Körpers überhaupt anzusehen. Von Interesse möchte noch der folgende Zusatz sein: „Länge, Breite und Dicke bezeichnen nicht bestimmte Richtungen der Ausdehnung, sondern drücken nur die Verschiedenheit derselben überhaupt aus. Wo alle drei Abmessungen zugleich vorkommen, da werden sie durch die genannten Ausdrücke bezeichnet, wobei es ganz einerlei ist, welche der drei Abmessungen man mit dem einen oder anderen Namen belegen will. Wo nur zwei Abmessungen vorkommen, werden sie durch Länge und Breite unterschieden, ihre absolute Richtung im Raum oder gegen unsern Horizont mag übrigens sein, welche es wolle. Und so bezeichnet Länge bei der Linie die Einfachheit in der Richtung der Ausdehnung, sie mag übrigens hingehen, wohin sie will."

„Der Punkt bezeichnet nur eine Stelle im Raum, ohne selbst einen Teil[1]) des Raumes auszumachen."

---

[1]) Flächen und Linien nehmen doch auch keinen Teil des Raumes ein.

Kröger, Leitfaden für den Geometrie-Unterricht. — Hamburg 1886. — Vergl. Kober.

Kruse,[1]) Elemente der Geometrie. I. — Berlin 1875 fügt der Entwicklung der Raumgröfsen und des Punktes aus der Betrachtung des Körpers noch folgendes hinzu:

„Da die Fläche als Grenze eines Raumteils kein Teil desselben, die Linie als Flächengrenze kein Teil der Fläche sein kann, so ist die Ausdehnung der Fläche beschränkter als die des Raumes, die der Linie beschränkter als die der Fläche. Diese Unterschiede will man ausdrücken, wenn man Linie, Fläche und Raum als Gröfsen von einer, zwei oder drei Dimensionen bezeichnet."

„Punkt, Linie, Fläche, Körper sind die Raumelemente. Irgend eine Verbindung von Raumelementen wird ein geometrisches Gebilde genannt."

Der folgende §, in dem Kruse über die Erzeugung mittels der Bewegung handelt, wird wegen seiner allgemeinen Betrachtungen weiter unten, wo ich den Begriff der Bewegung selbständig behandeln will, eine passendere Stelle finden.

Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851 fügt den üblichen Betrachtungen, die er in naturgemäfser Folge giebt, hinzu:

„Bei jeder Fläche lassen sich im Raum zwei Seiten unterscheiden; ebenso bei jeder Linie in einer Fläche, und bei jedem Punkt in einer Linie."[2])

„Das Unterscheiden der beiden Seiten[3]) einer Fläche verdient vornehmlich für die Körperlehre beachtet zu werden. Es ist hier wichtig, sich die Oberfläche eines Körpers nicht

---

[1]) Besprochen in H. Z. VII. p. 212—222.

„Wir haben es hier mit einer sehr tüchtigen Arbeit zu thun." „Im ersten Hauptstücke werden die Grundbegriffe entwickelt, die aus den drei Eigenschaften materieller Körper: der Ausdehnung im Raume, der Teilbarkeit und Beweglichkeit abgeleitet werden. Auf eine Definition des Raumes selbst läfst sich der Verfasser mit Recht nicht ein."

[2]) Vergl. meine obigen Ausführungen über den Begriff der Seite bei der Betrachtung der Flächen.

[3]) Vergl. die vorhergehende Erklärung.

blofs von der äufseren Seite vorzustellen, wie sehr oft geschieht, sondern auch von der inneren Seite, wo sie ganz anders[1]) erscheint. Eine Kugelfläche z. B. ist an der äufseren Seite erhaben, an der inneren hohl."[2])

Leesekamp, Die Elemente der ebenen Geometrie.[3]) — Kassel 1879 — geht vom Punkt aus, von dem er sagt:

„Ein Ort im Raume ohne jede Ausdehnung heifst Punkt."

Die übrigen Gebilde läfst er durch Bewegung entstehen, wobei er sich des Ausdrucks „Weg" bedient.

Legendre, ed. Crelle. — Berlin 1844 — bringt die Definitionen Euklids über Fläche und Linie. Dafs diese unzureichend sind, geht auch hier wieder hervor aus der Erklärung VIII, die Legendre im Euklidschen Sinne von dem Körper giebt:

„Körper heifst, was drei Abmessungen hat."

Man vergl. hiermit Erkl. I.:

„Die Ausdehnung hat drei Abmessungen, Länge, Breite und Höhe."

So kommt man zu dem merkwürdigen Resultat: Die Ausdehnung ist ein Körper.

Lieber u. v. Lühmann, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. I. — Berlin 1877.

„Man erkennt eine Raumgröfse daran, dafs sie Ausdehnungen oder Dimensionen hat."

„Deren können im Maximum drei vorkommen, aber es können auch weniger sein."

„Eine nach allen Seiten rings begrenzte Raumgröfse, welche drei Dimensionen besitzt, heifst ein Körper." „Stellt

---

[1]) Auch bei der Ebene?

[2]) Besser würde es heifsen: von der äufseren Seite (dem Raume aufserhalb) betrachtet erhaben, von der inneren Seite (dem Raume innerhalb) betrachtet hohl.

[3]) Besprochen in H. Z. XII. p. 120/21.

man sich einen Körper vor, der sich zusammenzieht, so dafs seine Dimensionen kleiner werden als jede noch so kleine Gröfse, so nähert man sich der Vorstellung eines Punktes."[1])

Die Entstehung der Raumgebilde aus der Bewegung der um eine Dimension niederen schliefst sich hieran an.

Liese, Angewandte Elementar-Mathematik. I. — Berlin 1875.

„Der allgemeine Raum hat unendlich viele Ausdehnungen oder Dimensionen, unter denen drei senkrecht auf einander stehende die Hauptrichtungen angeben; diese heifsen Länge, Breite, Höhe."[2])

„Ein allseitig begrenztes Stück des allgemeinen Raumes heifst ein mathematischer Körper."

„Er hat also auch drei Hauptausdehnungen." Die Flächen und Linien werden richtig erklärt.

Mehler, Menger, vergl. Kober.

Milinowski, Die Geometrie für Gymnasien.[3]) — Leipzig 1881.

„Punkt, Gerade, Ebene sind die Grundgebilde der Geometrie."

Mink, Lehrbuch der Geometrie. — Elberfeld 1879. — Vergl. Kober.

E. Müller, Lehrbuch der Geometrie.[4]) I. — Braunschweig 1879.

---

[1]) Man nähert sich der Vorstellung, die aber unmöglich ist. Jedenfalls ist aber dieser Ausdruck sehr viel besser, als die Ausführungen Hoffmanns. Vergl. oben.

[2]) Der Unterschied von Richtungen und Hauptrichtungen, nach denen gemessen wird, ist richtig hervorgehoben.

[3]) Besprochen in H. Z. XIII. p. 40/41.

[4]) Es können aus diesem vorzüglichen Buche, das für die Grundbegriffe der Geometrie äufserst wertvoll ist, nur kurze Angaben gemacht werden. Wer sich für diesen Teil der Geometrie interessiert, dem sei das Werkchen selbst aufs angelegentlichste empfohlen. Eine ausführ-

Nach einer Erklärung der Entstehung der Fläche (Oberfläche, Grenzfläche) heifst es weiter:

„Eine Oberfläche wie auch eine Grenzfläche ist Grenze der Extension des geometrischen Körpers nach je zwei entgegengesetzten Gegenden. Die so begrenzte Ausdehnung nach zwei Gegenden verschwindet in ihr, wird in ihr aufgehoben und es bleibt statt der Ausdehnung des Körpers nach sechs Gegenden für die Oberfläche und Grenzfläche, also für die Fläche eines geometrischen Körpers überhaupt nur eine Ausdehnung nach vier Gegenden[1]) oder vier Ausdehnungen nach Gegenden, oder je zwei der Ausdehnungen nach entgegengesetzten Gegenden wieder als eine Ausdehnung betrachtet, zwei Ausdehnungen schlechtweg.“

„Mit der Ausdehnung nach einer Gegend wird diese Gegend selbst in der Oberfläche oder Grenzfläche eines geometrischen Körpers überhaupt aufgehoben als Seite,[2]) ganz so wie sich das Aufserhalb und Innerhalb in der äufseren und inneren Seite aufhebt. — Die Seite ist die der Oberfläche oder Grenzfläche gebliebene Spur *der* Gegend, nach welcher die Ausdehnung des Innen- und Aufsenraumes des geometrischen Körpers aufgehoben ist.“

Der Ausführlichkeit der Betrachtungen wegen können diejenigen über Fläche, Linie und Punkt nicht weiter hier angeführt werden, ein kurzer Überblick ist aber wegen der Eigenartigkeit der Behandlung kaum möglich, wenigstens würde wahrscheinlich ein kurzes Referat unverständlich bleiben. Es

---

liche Rezension findet sich in H. Z. I. p. 323—332. Dieselbe schliefst mit den Worten: „Referent ist der Ansicht, dafs vorliegendes Buch, dessen vortreffliche Seiten schon mehrfach angedeutet worden sind, für den Lehrer der Mathematik von ganz besonderem Werte sein kann, wenn er einmal die Grundvorstellungen seiner Wissenschaft philosophisch feststellen will . . . .“

[1]) So unterscheidet man an der Fläche des Horizonts vier Himmelsgegenden.

[2]) Die Seite ist an der Fläche und mittels dieser am Körper. Die Gegend ist aufser ihm. Dieser Unterschied ist unbeachtet gelassen, wenn man sagt, der Raum dehne sich nach allen Seiten hin aus, statt von allen Seiten eines Körpers nach allen Gegenden. — Man vergl. meine obigen Ausführungen.

sei daher nochmals auf das Buch selbst hingewiesen, sowohl auf Teil I, dem diese Auszüge entnommen sind, wie auf Teil II Einleitung, wo sie zu kürzerem Ausdruck kommen. Von besonderem Werte ist auch die genaue Bestimmung des Begriffes Grenze, die das Verständnis der geometrischeh Raumgebilde wesentlich erleichtert.

H. Müller,[1]) Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1874 giebt die beiden üblichen Ableitungen (s. Kober) allerdings nach dem Prinzip der Dualität, das er sogleich an die Spitze seines Werkes stellt.

Joh. Müller, Lehrbuch der elementaeen Planimetrie. — Bremen 1870[2]) bezeichnet die Vorstellung des Ortes — ebenso wie die des Raumes und der Richtung — als eine einfache Grundvorstellung und sagt dann an einer anderen Stelle: „Indem man die Vorstellung des Ortes soviel als möglich vereinfacht, erhält man den einfachen Ort, welcher Punkt genannt wird.“ „Der Punkt hat keine Ausdehnung; denn ein Raumgebilde, welches Ausdehnung hat, enthält mehrere einfache Örter und ist deswegen selbst kein einfacher Ort.“

Die Raumgebilde stellt er zuerst als durch Bewegung erzeugt dar, dann erst als Grenzen. Drittens werden die Gebilde als abstrakte Gröfsen (Begriffe) behandelt.

„Die Fläche ist nach unendlich vielen, doch nicht mehr nach allen Richtungen ausgedehnt.“ . . .

„Die Linie ist an jeder Stelle[3]) nur nach einer Richtung ausgedehnt und teilbar.

---

[1]) Besprochen in H. Z. V. — p. 449—454.

[2]) Besprochen in Schl. Z. V, 61 und in H. Z. I. p. 155. In der letzteren Rezension (von Schwarz-Elmshorn) heifst es u. a.: „Die allgemeine Einführung in den Gegenstand der Betrachtung oder, wenn man will, die metaphysische Grundlage ist gerade die schwache Seite auch dieses Buches. (Als besondere Beispiele werden die Gerade und die Ebene erwähnt.) — Sonst verdient übrigens auch die Einleitung die Anerkennung, welche dem Werke im allgemeinen zukommt. Sie giebt eine klare Auseinandersetzung über das Wesen der Sätze, und der Begriff der Bewegung . . . . wird sogleich näher festgelegt und als ein wichtiges Beweismittel mit Recht festgehalten.“

[3]) Wie es scheint, geht diese Bemerkung darauf hin, dafs man die

J. H. T. Müller, Lehrbuch der Mathematik. — Halle 1844.

Müller giebt in klarer Darstellung die übliche Grenzableitung, wobei er durch eingestreute gut gewählte Fragen den Gegenstand dem Verständnis nahe zu bringen sucht.

Von besonderem Interesse für den Begriff der Seite ist folgende Bemerkung:

„So lange die Linie in der unbegrenzten Fläche liegend gedacht wird, so lange lassen sich auch an ihr zwei Seiten unterscheiden.[1]) Denkt man sich dagegen die Linie abgesondert und im Raume liegend, so giebt es unendlich viele Seiten, von denen *aus* sie sich ansehen läſst.“

Sämtliche Raumgebilde werden dann noch weiteren, sehr eingehenden Betrachtungen unterzogen, die geeignet erscheinen, indem sie die Begriffe von verschiedenen Seiten beleuchten, das Verständnis auſserordentlich zu fördern.

Nagel, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ulm 1873 giebt das Übliche in richtiger Darstellung.

Pfleiderer, Scholien zu Euklids Elementen. — Stuttgart 1827.

Körper, Flächen, Linien werden nach üblicher Erklärung angegeben. Dann heiſst es weiter:

„Die Grenzen endlich einer begrenzten geraden Linie, so wie die Zeichen eines genau bestimmten Orts auf einer Linie, Fläche oder Körper, welche man also ohne alle Ausdehnung denken muſs, heiſsen Punkte. Daher definiert sie Savilius

---

Linie im allgemeinen nicht als nach nur einer Richtung ausgedehnt bezeichnen darf, sondern daſs man nur für das Linienelement diesen Ausdruck wählen darf. Aber auch hier muſs man noch genau unterscheiden, wie aus meinen obigen Ausführungen über die Elemente der Raumgebilde hervorgeht. — Vergl. auch Kapitel IV u. V.

[1]) Diese Seiten lassen sich aber doch nicht an der Linie unterscheiden, sondern an der Fläche, in der die Linie liegt, d. h. auf der einen Seite von der Linie aus liegt der eine Teil der Fläche, auf der anderen der andere.

(Lect. III) nicht unpassend als Merkzeichen einer unteilbaren Lage (Notas situs indivisibilis)."

Mit dem Satze: „Die Begriffe von der Ausdehnung sind den Geometern nicht eigentümlich, sondern schon in der gemeinen Sprache und Verkehr geläufig" stellt sich Pfleiderer auf den Standpunkt des a priori im Menschen liegenden Raumes. Besonders geht dies auch aus den angeführten Beispielen hervor, so u. a.: „Wer eine Elle gebraucht, giebt nur auf ihre Länge acht, nicht auf den Stoff, aus dem sie gemacht ist, ihre Dicke und übrigen Eigenschaften." Punkte und Linien, die wir darstellen, sind immer Körper, bei dem einen abstrahieren wir von aller Ausdehnung, bei dem anderen von jeder aufser der in die Länge. — (Robert Simson nach Matthias Auszug. Magdeburg 1799. — Hauber Chrestomathia geometrica. — Tübingen 1820.)

Aus Kästners Abhandlungen wird u. a. zitiert: Die mathematischen Raumgebilde Punkt, Linie, Fläche werden „freilich vom Auge nicht gesehen, aber bei dem, das das Auge sieht, können sie vom Verstande gedacht werden."[1])

Da die Benennungen der geometrischen Gebilde „nichts in ihrer Bildung haben, das auf äufseres Erscheinen an einem Körper deutet", so ist es „methodischer, von der körperlichen Ausdehnung anzufangen", und von ihnen ausgehend „die Grenzen wahrzunehmen".

„Euklid scheint von einem Nichts anzufangen." „Die Definition (des Punktes) scheint blofs zu sagen, was das Ding nicht ist; und sollte doch sagen, was es ist."

„Also setzt sie zum voraus, man verbinde mit dem Worte einen klaren Begriff . . ."[2])

Rausenberger, Die Elementargeometrie etc.[3]) — Leipzig 1887.

Auf die Grenzbetrachtungen folgt die Bemerkung:

---

[1]) Sehr richtig!

[2]) Die übrigen Zitate Pfleiderers an dieser Stelle werden von mir anderweitig verwertet.

[3]) Ausführlich besprochen in H. Z. XX, 517—520.

„Wie uns die Anschauung lehrt, ist ein Punkt keiner weiteren Zerlegung fähig; er ist das letzte Element, zu dem uns unsere Betrachtung[1]) führt."

Es heifst dann weiter:

„Sowie wir der Anschauung die Begriffe des Punktes, der Linie, der Fläche und des Körpers entlehnen mufsten, ohne eine eigentliche Definition derselben, d. h. eine logische Zurückführung auf einfachere Begriffe geben zu können, so . . ."

Recknagel,[2]) Ebene Geometrie. — München 1885.

„Für die Vorstellung einer Fläche, die nicht Grenze (Oberfläche) eines Körpers wäre, giebt uns die Erfahrung keinen Anhaltspunkt. Doch pflegt man in der Geometrie auch an Flächen zu denken, ohne sich den Körper, den sie begrenzen, zugleich vorzustellen, d. h. man abstrahiert vom Körper."

„Es läfst sich der Punkt auch unabhängig von der Linie denken als einzelne Stelle im Raume; Linie . . . als Spur eines bewegten Punktes etc."

Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht.[3]) — Berlin 1886.

„Der Unterricht beginnt in der Regel mit einer Erörterung der Begriffe Körper, Fläche etc."

„Man hüte sich hierbei vor dem Bestreben, diese Begriffe metaphysisch-abstrakt festzustellen und begründen zu wollen; dafür hat der Anfänger absolut kein Verständnis. Es mufs hier genügen, dieselben anschaulich klar zu machen."[4])

---

[1]) Aber doch die denkende Betrachtung, nicht die anschauende. Es kann uns also auch nicht die Anschauung über den Punkt belehren. Man vergleiche die weitere Ausführung Rausenbergers, worin er mit sich im Widerspruch erscheint, wenn er sagt, dafs wir der Anschauung einen Begriff entlehnen.

[2]) Besprochen in H. Z. III. p. 282. — Referent (Hoffmann) empfiehlt das Buch angelegentlichst.

[3]) Ausführlich und sehr anerkennend besprochen von H. Stade in H. Z. XIX. p. 191—202.

[4]) Mit dieser Weisung des ausgezeichneten Pädagogen wird wohl jeder Lehrer einverstanden sein; aber irgend wann im Laufe des geo-

„Daſs eine Fläche die Grenze eines Körpers ist, daſs dieselbe keine Dicke, wie die Linie keine Breite, der Punkt keine Länge hat, das versteht der Schüler leicht, zumal wenn ihm nicht von vornherein zugemutet wird, bei der Fläche vom Körper zu abstrahieren[1]), jene also von diesem gelöst sich vorzustellen. Vielmehr ist hier ausdrücklich zu bemerken, daſs Flächen nur an Körpern u. s. w. vorkommen können. Der Schüler wird dann auf erläuternde Fragen, z. B.[2]) wie tief man mit einer Nadel in einen Körper hineinstechen dürfe, damit die Spitze derselben nicht aus der Grenzfläche heraus und in das Innere des Körpers hinein gelange, von selbst die Antwort finden: gar nicht."

Die Entstehung der Gebilde durch Bewegung ist verständlich, jedoch muſs besonders darauf aufmerksam gemacht werden, daſs es sich nicht um ein „Aneinanderreihen" von Punkten handelt, oder um ein „Aufeinanderlegen" von Flächen resp. daſs wir auf solche Weise nicht zu Gebilden höherer Ordnung gelangen."

Dagegen verwirft mit Recht Reidt für den Anfang alle abstrakten Untersuchungen und unklaren Definitionen, wie die Euklidsche vom Punkt, indem er auf deren Schwierigkeit hinweist. Es heiſst dann weiter:

„Wir müssen vielmehr im Unterricht eine Anzahl von Grundbegriffen als durch die äuſsere und innere Anschauung gegeben annehmen . . ."

Die einfachsten Grundbegriffe[3]) dürfen als gegeben vorausgesetzt werden und bedürfen höchstens der Erläuterung und Erklärung.

---

metrischen Unterrichts müſste doch einmal wieder auf die Grundbegriffe zurückgegriffen werden und ihnen eine eingehendere Behandlung als die angegebene gewidmet werden.

[1]) Mir erscheint auch diese Forderung erfüllbar. Würde man die Fläche etc. nur als Grenze den Schüler auffassen lassen, so würde doch zu viel Unklarheit in der Vorstellung zurückbleiben.

[2]) Die Vorzüglichkeit dieses Beispiels ist schon an anderer Stelle hervorgehoben.

[3]) Reidt rechnet dazu auch den Winkel. — Man vergleiche meine Abhandlung, Zur Definition des Winkels, in H. Z. XX. p. 481 (Anm.) und die dem vorliegenden Bande vorangehende Studie p. 27.

Reidt, Die Elemente der Mathematik.[1]) II. — Berlin 1888.

Nach Vorübungen an bestimmten Körpern behandelt Reidt die Grundbegriffe nach den von ihm in der Anleitung gegebenen Grundsätzen, die hier nicht wiederholt zu werden brauchen.

Rottock, Lehrbuch der Planimetrie. — Leipzig 1888. — Vergl. Kober.

Rummer, Lehrbuch der Elementargeometrie. — Heidelberg 1869. — Vergl. Kober.

Sadebeck, Elemente der Geometrie. — Breslau 1872. — Vergl. Kober.

Schindler, Elemente der Planimetrie.[2]) — Berlin 1883.

„Geometrischer Körper heifst die Ausdehnung eines Körpers.“[3])

„Ein jeder geometrische Körper läfst unterscheiden sein erkennbares Äufsere und sein nicht erkennbares Innere.[4]) Die Wahrnehmung seines Äufseren rührt her von seiner oben befindlichen äufsersten Schicht.“

„Oberfläche heifst die oberste Grenzschicht[5]) eines geometrischen Körpers.“

Analog werden die Linien und Punkte behandelt.

„Oberfläche und Volumen sind die Glieder eines geometrischen Körpers.“

„Umfang und Fläche sind die Glieder einer Figur.“

„Länge und Punkt sind die Glieder einer Linie.“

„Die Punkte lassen Glieder nicht mehr unterscheiden. Sie sind daher einfache Raum-Wahrnehmungen.“

---

[1]) Besprochen in Schl. Z. XXV, 194 und in H. Z. VI. p. 174—175; Bardey empfiehlt sie bestens.

[2]) Eine ausführliche Besprechung voller Anerkennung findet sich in H. Z. XVII. p. 46—57.

[3]) Besser würde es heifsen, geometrischer Körper wird der physische genannt, wenn man ihn nur in Bezug auf seine Ausdehnung betrachtet.

[4]) Der Sinn dieses Satzes ist meinem Verständnis leider verborgen geblieben. Vielleicht ist der physische Körper gemeint.

[5]) Damit wäre denn die Fläche ein Teil des Körpers.

„Punkte sind die einfachsten Glieder eines geometrischen Körpers."

Diese Ableitung bezeichnet Schindler als Analyse;[1]) als Synthese fügt er den Aufbau der Gebilde aus ihren Gliedern hinzu, die Entstehung der Gebilde durch Bewegung der nächst niederen. Dabei stellt er folgenden Grundsatz auf:

„Der Punkt ist eine unendlich kleine ausgedehnte Gröfse."[2])

Demgemäfs definiert er:

„Eine Linie ist eine stetige Punkten-Folge in der Längenausdehnung."[3])

„Eine Fläche ist eine stetige Linien-Folge in der Breitenausdehnung."

„Das Volumen ist eine stetige Flächen-Folge in der Ausdehnung der Dicke."

Daraus ergeben sich für ihn die Folgerungen:

„Eine Fläche ist ein geometrischer Körper, dessen Dicke unendlich klein ist."[4])

„Eine Linie ist ein geometrischer Körper, dessen Breite und Dicke unendlich klein sind."

„Ein Punkt ist ein geometrischer Körper, dessen Breite, Dicke und Länge unendlich klein sind."

Schlegel, System der Raumlehre.[5]) — Leipzig 1872.

---

[1]) „Analyse heifst die Methode, durch welche die Glieder eines Körpers bestimmt werden."

„Synthese heifst die Methode, nach welcher die Körper aus ihren Gliedern gebildet werden."

[2]) Das ist ganz entsprechend der Auffassung der Fläche als einer Schicht. Aber was ist das für eine Erklärung der Grundbegriffe! Richtig würde es sein, wenn es hiefse: Unsere Vorstellung des Begriffes Punkt ist die einer unendlich kleinen ausgedehnten Gröfse.

[3]) Wenn der Punkt als eine zwar unendlich kleine, aber doch immerhin ausgedehnte Gröfse definiert wird, so kann sich aus Punkten auch wirklich eine Linie zusammensetzen. Man vergleiche damit das Zitat aus Reidts Anleitung weiter oben, wo ausdrücklich davor gewarnt wird, nicht an ein Aneinanderreihen von Punkten oder ein Aufeinanderlegen von Flächen zu denken.

[4]) Man vergleiche Hoffmanns Ansichten, die in dem Zitate aus seiner Vorschule weiter oben zu ersehen sind.

[5]) Eine ausführliche Besprechung und Würdigung dieses Buches findet sich in H. Z. VIII. p. 45—59.

Auf dieses „nach den Prinzipien der Grafsmannschen Ausdehnungslehre“ bearbeitete Werk sei hier mit Nachdruck aufmerksam gemacht, auf ein Anführen von Zitaten mufs verzichtet werden, da bei der total verschiedenen Behandlung des Stoffes dieselben zu ausführlich sein müfsten. Vorläufig scheint diese Bearbeitung auch nicht für den Unterricht einführbar und also aufserhalb des Rahmens des vorliegenden Werkes.

Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik.[1]) II. — Wolfenbüttel 1879.

Nach der Definition des Körpers heifst es:

„Von dem umgebenden Raume wird der Körper getrennt durch eine Fläche (Oberfläche), welche den Körper vollständig begrenzt und gewöhnlich[2]) aus mehreren gleichartigen Teilen besteht, welche Figuren heifsen.“

„Der Körper ist ein vollständig begrenzter Teil des Raumes, und die Fläche ist die Grenze des Körpers.“

Umgekehrt: „Jedes durch Figuren vollständig begrenzte Gebilde ist ein Körper.“

Analog: „Die Figur ist ein vollständig begrenzter Teil der Fläche, und die Linie ist die Grenze der Figur.“

Umgekehrt: „Jedes durch Strecken vollständig begrenzte Gebilde ist eine Figur.“

„Die Strecke ist ein vollständig begrenzter Teil der Linie, und der Punkt ist eine Grenze der Strecke.“

Umgekehrt: „Jedes durch Punkte vollständig begrenzte Gebilde ist eine Strecke.“

Diese Definitionen werden dann dual gegenübergestellt. Auch Schlegel betont, dafs Punkte, Linien und Flächen nicht für sich aufser uns existieren, sondern nur an Körpern, dafs

---

[1]) Besprochen in H. Z. XI. p. 208—213. — Es heifst davon p. 210: „Besonderer Fleifs wird auf die Definition und Klarstellung der Fundamentaleigenschaften aller geometrischen Gebilde verwendet, wobei auch auf entsprechende Beispiele aus dem täglichen Leben Bedacht genommen ist.“ Günther sagt zum Schlufs der Rezension: „Solche Leistungen sprechen für sich selbst.“

[2]) Schlegel hat also in erster Linie an die Polyeder gedacht.

wir sie aber in der Vorstellung[1]) von jenen loslösen und für sich betrachten können.

Die Grundbegriffe werden alsdann abgeleitet „durch Überlegung mittelst des Begriffs der Bewegung.“

An diese Darstellung knüpft sich eine Betrachtung der Eigenschaften der geometrischen Grundgebilde, d. h. der Ausdehnung, der Gröfse,[2]) der Zusammensetzung und Teilung, der einfachen und zusammengesetzten Bewegung, der Gestalt, der begrenzten und unbegrenzten Bewegung, der endlichen und unendlichen Bewegung.

In der „reinen Geometrie“ sagt Schlegel noch vom Punkt: „Ein Punkt hat nur das Merkmal der Lage.“

Schlömilch,[3]) Geometrie des Mafses. — Leipzig 1874. — Vergl. Kober.

Schurig, Schwabe u. Schmidt, Schweder desgl.

Snell, Lehrbuch der geradlinigen Planimetrie. — Leipzig 1857.[4])

Auf die Ausführungen der Einleitung sei hingewiesen, da sie, wenn auch nichts Eigentümliches, dieses jedoch in klarer, anschaulicher Form enthalten.

Sonnenburg, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Bremen 1868.

Nach der Darstellung der Grenzbetrachtungen sagt Sonnenburg:

---

[1]) Im Denken.

[2]) „Der Punkt hat keine Gröfse (die aus der längeren oder kürzeren Dauer der Bewegung resultiert). — Die Gröfse der Strecke fällt zusammen mit derjenigen ihrer Länge, so dafs für die Strecke die Ausdrücke „Gröfse“ und „Länge“ dasselbe bedeuten. — Die Gröfse der Figur richtet sich nach derjenigen ihrer Länge und Breite, die des Körpers nach derjenigen seiner Länge, Breite und Dicke.“

[3]) Besprochen in H. Z. VI. p. 160—166.

[4]) Besprochen in Schl. Z. III, 95.

„Die Geometrie geht vom mathematischen Punkte, als der einfachsten Grundvorstellung aus. Er dient zur Bezeichnung eines Ortes im Raume.“

Darauf folgt dann die Erzeugung der räumlichen Gebilde durch Bewegung.

Spieker,[1]) Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Potsdam 1873. — Vergl. Kober.

Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1888. — Desgl.

Stegmann, Grundlehre der ebenen Geometrie. — Kempten 1886. — Desgl.

---

v. Swinden, Elemente der Geometrie. — ed. Jacobi. — Jena 1834.

„1. Erklärung. Wenn man an dem Raume blofs eine Dimension, die Länge, betrachtet, ohne auf die beiden anderen Breite und Dicke (oder Höhe) Rücksicht zu nehmen, so gelangt man zu der Vorstellung einer Linie.“ (Eukl. I. Erkl. 2. — L. G. I. Erkl. 1.)

„2. Erklärung. Die Grenzen der Linien und deren gegenseitige Durchschnitte heifsen Punkte.“ (Eukl. I. Erkl. 1 u. 3. — L. G. I, Erkl. 1.)

„14. Erklärung. Fläche heifst diejenige Raumgröfse, zu deren Vorstellung man gelangt, indem man an dem Raum blofs die Dimensionen der Länge und Breite betrachtet, und von der Dicke oder Höhe ganz absieht.“ (Eukl. I. Erkl. 5. — L. G. Erkl. 5.)

„Zus. Die Grenzen einer Fläche sind Linien, gerade oder krumme.“

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822.

„Durch die Vorstellung des Körpers, wenn man sie als schon vollendet zum Grunde legt, gelangt man reflektierend zur Vorstellung der Fläche, oder der bestimmten

---

[1]) Besprochen in H. Z. III. p. 173; 499.

Grenze, welche den Raum des Körpers von den umgebenden unendlichen absondert. Der Fläche selbst kommt noch eine Ausdehnung zu; sie besteht auf eine ähnliche Art wie der Raum aus gleichartigen Teilen, und eben deswegen lassen sich an Flächen selbst noch wieder bestimmte Grenzen denken (brauchen aber nicht gedacht zu werden). Diese werden Linien genannt. Auch die Linie ist ausgedehnt und besteht aus gleichartigen Teilen, es giebt also insofern notwendig eine Grenze für Linien, den Punkt. Die Ausdehnung des Körpers hat drei Dimensionen, Länge, Breite und Dicke, die der Fläche zwei, Länge und Breite, die der Linie nur eine einzige, Länge; dem Punkte, als der letzten Grenze aller Ausdehnung, wird Einfachheit und Unteilbarkeit beigelegt; bei ihm also findet die Reflexion ein gänzliches Ende. Wenn die Vorstellung eines best. Körpers erzeugt werden soll, so ist das Setzen des Punktes das Erste, wovon die ganze Konstruktion ausgeht" (durch ihn und von ihm aus wird die Linie beschrieben etc.).

.... „Die letzte Vorstellungsart ist die eigentlich geometrische."

Uth, Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. — Kassel 1881 giebt nur die Herleitung aus dem Grenzbegriff.

Wiegand, Lehrbuch der Mathematik. I. — Halle 1863. — Vergl. Kober.

Wohlgemuth,[1]) Lehrbuch der Geometrie. — Libau 1877 unterscheidet drei Klassen räumlicher Gröfsen. Er geht vom Körper aus und benutzt den Begriff der Grenze in der üblichen Weise, dann wird die Erzeugung ebenfalls in der üblichen Weise durch Bewegung behandelt.

Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830 betont ausdrücklich, dafs Flächen, Linien, Punkte für sich bestehend

[1]) Besprochen in Schl. Z. XXIII. p. 187.

gedacht werden können; dafs die Teile einer räumlichen Gröfse unter sich und mit dem Ganzen gleichartig sind und dafs deshalb „niemals Körper hervorgehen können durch Zusammensetzung von Flächen, Flächen durch Zusammensetzung von Linien, oder Linien durch Zusammensetzung von Punkten."

Worpitzky,[1]) Elem. d. M. III. — Berlin 1874.

Der Grenzbegriff wird benutzt. Vom Punkte stellt Worpitzky folgendes Axiom auf:

„Kein Punkt ist in solcher Weise teilbar, dafs die Teile sich untereinander und vom Ganzen unterscheiden," während von den übrigen Gebilden des Raumes die unbeschränkte Teilbarkeit als Axiom aufgestellt wird.

In einer Scholie wird dann besonders darauf aufmerksam gemacht, dafs die Punkte nicht Teile der Linie sind etc., dafs mithin durch Summation von Punkten keine Linien entstehen etc., dafs aber durch die Summation von Körpern ein bel. ausgedehnter Raumteil[2]) erzeugt wird.

Nach der Erörterung des Begriffes Bewegung wird als Zusatz aufgestellt:

„V. Jeder bewegte Punkt beschreibt eine Linie, jede nicht in sich selbst gleitende Linie eine Fläche, jede nicht in sich selbst gleitende Fläche einen Raumteil."

Dazu heifst es in einer Scholie:

„In Betreff des Zus. V. ist die Bemerkung wichtig, dafs man sich nicht jede Linie als durch Bewegung eines Punktes und nicht jede Fläche als durch Bewegung einer Linie (auch wenn man die letztere fortwährend verbiegt) beschrieben vorstellen kann."[3])

---

[1]) Besprochen in H. Z. VI, p. 232—236. — Es heifst da: „. . . müssen wir von vornherein dieselbe als ein vorzügliches Werk erklären, welches die allgemeinste Beachtung verdient."

[2]) Jedoch nicht der Raum selbst, wenigstens nicht durch Summation einer endlichen Zahl von Körpern.

[3]) Es erscheint durchaus nicht überflüssig besonders aufmerksam zu machen darauf, dafs nicht jede Fläche als durch Bewegung einer Linie erzeugt gedacht werden kann.

Wunder, L. d. M. III. — Leipzig 1840.

„Die Grenze des Körpers ist etwas nach zwei Dimensionen Ausgedehntes und wird Fläche genannt. In der Natur erscheint die Fläche immer nur in Verbindung mit einem Körper als dessen Grenze, Oberfläche, nirgends abgesondert für sich allein."[1])

Analog werden ausführlich Linie und Punkt erklärt.

Die Erzeugung der Raumgröfsen durch Bewegung benutzt Wunder zugleich zum Nachweis dafür, dafs es drei Arten von Raumgröfsen, und nur drei Arten von Raumgröfsen giebt, dafs wirklich nicht mehr existieren.

„Wollte man noch einen Körper fortschreiten lassen, so könnte dieses nach keiner Richtung geschehen, nach welcher der Körper selbst nicht schon ausgedehnt wäre; der von dem Körper durchlaufene Weg wird immer wieder nur eine Raumgröfse von drei Dimensionen, d. i. wieder ein Körper sein, man erhält also hierdurch nicht eine neue Art von Raumgröfsen."

Ziegler, Grundrifs der ebenen Geometrie. — Landshut 1881.[2]) — Vergl. Kober.

Ohm, Die reine Elementar-Mathematik. — Berlin 1835. — Desgl.

Hoffmannn, J. J., Geometr. Anschauungslehre.[3]) — Mainz 1839.

---

[1]) „Das, was zwei unmittelbar nebeneinander liegende Teile des Raumes trennt, überhaupt, was einen Körper begrenzt, hat auch Ausdehnung, aber nur nach zwei Dimensionen. Man denke z. B. ein Glas halb mit Wasser gefüllt und darüber noch etwas Öl gegossen; der Raum, den das Wasser einnimmt, wie der des Öls, bildet einen mathematischen Körper; eine Stelle, die man sich zwischen dem Wasser und dem Öl vorstellt, kann ihre Lage vorwärts und rückwärts und rechts oder links hin, aber nicht aufwärts oder niederwärts ändern, ohne in das Wasser oder in das Öl zu kommen."

„Man betrachte ein Blatt Papier, dessen eine Hälfte schwarz, die andere weifs ist, und denke sich einen Ort zwischen dem Schwarz und Weifs."

[2]) Besprochen in H. Z. I. p. 239.

[3]) Auf die Ausführungen Hoffmanns sei ausdrücklich auf-

H. geht vom gezeichneten Punkt und gezeichneten Linien aus. Dann fährt er fort:

„Bei allen diesen Linien sieht man weder auf die Breite, noch auf die Dicke, sondern blofs auf ihre Länge.[1]) Dies gilt sowohl von Linien, welche man mit einem Stücke Kreide auf der schwarzen Tafel, als auch .... — Diese Linien bestehen zwar wirklich aus kleinen Körperchen von Kreide etc.; allein man betrachtet an ihnen weder diese Körperchen, noch ihre Breite, sondern blofs ihre Länge."

„Daher versteht man unter einer blofs gedachten oder geometrischen Linie jene Ausdehnung im Raume, die sich nur nach der Länge erstreckt."

„Alle sichtbaren Linien sind also nichts, als Stellvertreter derjenigen Linien, die wir uns eigentlich nur denken."[2])

„Daher läfst sich zwischen zwei Punkten eine gerade Linie denken, wenn dieselben auch durch undurchsichtige Gegenstände so voneinander getrennt sind, dafs man nicht einmal von dem einen zu dem andern sehen kann."

„Anmerkung. Diese Betrachtungen bilden den wichtigen Übergang von der äufseren Anschauung zur inneren; von dem, was das Auge sieht, und was der Verstand denkt. Daher ist es durchaus notwendig, den Schüler jedesmal von der äufseren Betrachtung nach der inneren zu leiten, damit

---

merksam gemacht. Besonders gelungen erscheint die Hinüberleitung von der äufseren zur inneren Anschauung, von dem sichtbaren Objekt zum gedachten Begriff.

[1]) Auch diese Umschreibung des Begriffes abstrahieren giebt sehr glücklich den dabei sich abspielenden inneren Vorgang wieder.

[2]) „Wenn man sich eine gerade Linie mit Kreide, Tinte, Tusche, Bleistift oder durch eine ausgespannte Schnur denkt, so bemerkt man, dafs das Eigentümliche der Linie nicht im Stoff liegt, sondern lediglich in der geraden Ausdehnung nach der Länge. Wer sich auf dem Felde, z. B. von einem Baume nach dem andern, eine gerade Linie vorstellt, denkt sich weder eine gespannte Schnur, noch einen Draht, noch weniger einen Strich von irgend einer Farbe, sondern eine Ausdehnung nach der blofsen Länge, in gerader Richtung, von einem Baume zum andern. Diese Linie ist also eine blofs gedachte und keine mit Augen gesehene. Sie ist in uns, nicht aufser uns."

Man vergleiche Wundts Ausführungen in seinem System der Philosophie über die stellvertretenden Vorstellungen.

alles Mechanische[1]) vermieden, das Geistige aber zur klaren Erkenntnis gebracht werde."

Auch die Ausführungen über Punkte (geometrische und physische), sowie über den Unterschied der physischen und geometrischen Linien insofern, als die einen durch nebeneinanderliegende Punkte gebildet werden, die andern nicht, sind sehr klar und im Unterricht gewifs mit Erfolg zu verwerten.

Kästner, Anfangsgründe etc. — Wien 1788.

„Die körperliche Ausdehnung, ein geometrischer Körper (solidum, corpus) heifst eine solche Ausdehnung, die das, was sich innerhalb ihrer Grenzen befindet, überall, nach allen Seiten zu, umgiebt. Die Ausdehnung der Körper an ihren Grenzen heifst eine Fläche (superficies) und die Ausdehnung der Fläche an ihren Grenzen eine Linie (linea)."[2])

„Die Wörter Länge, Breite, Dicke sind dem Sprachgebrauche nach nicht Namen verschiedener Ausdehnungen, sondern einer einzigen, der Länge, die nach verschiedenen Richtungen an dem Körper betrachtet wird.[3]) Übrigens enthält die Ausdehnung der Fläche nichts von der körperlichen, welche bei ihr aufhört. Also können übereinander gehäufte Flächen keinen Körper ausmachen, weil vielmal nichts nie etwas ausmacht."

„Man darf überall in der Linie Punkte annehmen. Es ist aber einerlei, ob man in der Linie überall Punkte annimmt, oder ob man sich einen einzigen Punkt, der nach und nach in verschiedene Stellen der Linie gekommen wäre, vorstellt; denn ein Punkt ist von dem andern in nichts unterschieden.[4])

---

[1]) Wohl besser „Materielle".

[2]) Zum mindesten ist die Ausdrucksweise eine sehr eigentümliche: die Ausdehnung der Körper an ihren Grenzen heifst eine Fläche etc.

[3]) Diese Bemerkung ist recht zutreffend und geeignet eine klare Auffassung zu bewirken; wenn wir statt Länge das „Auseinandersein" setzen, so würde die vorliegende Ausführung auch philosophisch brauchbar sein. Dafs es sich bei Länge, Breite und Dicke nicht um verschiedenartige Ausdehnungen handelt und dafs es in der That nur eine Ausdehnung giebt, dies noch ausdrücklich auszusprechen, wird im Unterricht nicht ohne Nutzen sein.

[4]) Aufser durch die Lage.

Daher sagt man: Eine Linie entstehe aus der Bewegung eines Punktes."

Unger, Die Geometrie des Euklid. — Erfurt 1833.

Die Erklärungen sind selbstverständlich die des Euklid, jedoch fügt der Verfasser noch Anmerkungen hinzu, aus denen einiges entnommen werden soll. Zuerst wird die Identität von Länge, Breite und Höhe oder Tiefe durch den gemeinsamen Namen Richtung oder Dimension festgestellt. Die Linie wird dann als eine einfache Dimension des Raumes definiert, die Fläche als das, was zwei Dimensionen hat. Vom Körper wird überhaupt nicht gehandelt.

Fenkner, Lehrbuch der Geometrie. I. — Braunschweig 1888.

Fenkner schickt der gewöhnlichen Betrachtung der Grundvorstellungen Vorübungen voraus, in denen von bestimmten Körpern gehandelt wird. [1) Würfel und Quadrat; 2) Gerade quadrat. Säule und Rechteck; 3) Rhomboëder und Rhombus; 4) gerades dreiseitiges Prisma und Dreieck; 5) gerades sechsseitiges Prisma und Vieleck; 6) Pyramide; 7) Kreiszylinder und Kreis; 8) Kreiskegel; 9) Kugel.]

Die Grundvorstellungen selbst werden alsdann aus dem Grenzbegriff entwickelt und darauf der Erzeugung durch Bewegung gedacht; ganz in der üblichen Weise.

Koppe, Die Planimetrie. — Essen 1885.

Vom Körper ausgehend entwickelt K. die Grundvorstellungen aus dem Grenzbegriff. Dafs die Flächen und Linien als selbständige Gebilde nirgends vorkommen, sondern nur in der Vorstellung gesondert betrachtet werden können, wird ausdrücklich betont.

Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie. — Köln 1867.

Die Verfasser gehen vom Punkte aus, den sie definieren: „Punkt ist dasjenige, was einen Ort im Raume bestimmt, ohne

selbst ein Teil des Raumes zu sein. Er hat also weder Ausdehnung noch Teile.“ — Daran knüpft sich die Definition der Linie: „Linie ist das, was ein Punkt durch seine Bewegung im Raume beschreibt; sie hat nur eine Ausdehnung (Dimension), Länge, aber keine Breite.“

Analog werden Flächen und Körper erklärt. Dann erst wird der Zusammenhang der Gröfsen im Grenzbegriff dargestellt.

Kober bemerkt zu der Definition des Punktes in seinem schon bei Euklid zitierten Aufsatz (in H. Z. I. p. 228).

„Was ist Ort? Nur ein anderes (allgemeineres) Wort für Punkt; durch den Reichtum der Sprache ist also nur die Tautologie verhüllt. Und sobald Ort und Punkt nicht als identisch vorausgesetzt werden, gilt dann nicht dieselbe Definition von einer Kugelfläche oder einer Ebene oder einer Linie u. s. w., die auch nicht Teile des Raumes sind? Was soll der Schüler denken, wenn ihm später der Begriff des geometrischen Ortes vorgeführt wird? (Dann hat er hoffentlich die ganze Definition vergessen.)

Sodann ist gleichzeitig auch der Begriff des Raumes und zwar stillschweigend vorausgesetzt; man fängt also mit zwei entgegengesetzten Begriffen zugleich an, um — recht streng wissenschaftlich synthetisch zu Werke zu gehen! Mit der besprochenen Definition teilt die Fehler auch die Definition: „Der Punkt ist eine ausdehnungslose Stelle im Raume.“

Löser, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Weinheim 1882.

Vom Körper und den Grenzen wird ausgegangen.

„Unter Fläche versteht man im allgemeinen die Teil- oder Trennungsstelle, welche einen Raum in zwei Räume zerlegt.“

„Die Teil- oder Trennungsstelle, welche eine Fläche in zwei Flächen zerlegt, oder vielmehr das Bild jener Stelle, heifst Linie.“

„Die Teilstelle einer Linie, oder auch die Trennungsstelle beider Teile derselben, heifst Punkt.“

„Der Punkt hat keine Ausdehnung, obgleich man ihn mit zu den Raumgröſsen rechnet.“

Auf den Unterschied der Zusammensetzung und der Bewegungserzeugung wird besonders hingewiesen.

Focke u. Krass, Lehrbuch der Geometrie. I. — München 1878. — Vergl. Kober.

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

„Es giebt drei Arten räumlicher Gegenstände: Körper, Flächen und Linien. Die Körper werden von Flächen, die Flächen von Linien, die Linien von Punkten begrenzt. Körper lassen sich zu einem neuen körperlichen Raum auf drei Weisen: nebeneinander, vor- oder hintereinander, und über- oder untereinander; Flächen auf zwei Weisen: nebeneinander und vor- oder hintereinander, aber nicht über- oder untereinander, zu einer neuen Fläche zusammenstellen; Linien können nur auf eine Weise, vor- oder hintereinander, aber nicht neben- oder übereinander, zu einer ähnlichen Linie zusammentreten.“

Daraus wird dann die Dimensionalität entwickelt.

Die Unteilbarkeit der Grenze wird ausführlich behandelt und gefolgert, daſs nicht zwei Grenzen nebeneinander liegen können. „Nach der Grundbeschaffenheit dieser (kontinuierlichen) Gröſsen haben deren unmittelbar aufeinander folgende Teile eine gemeinschaftliche Grenze.“

Hieraus ergiebt sich die Unmöglichkeit, eine Linie aus einer Reihe nebeneinanderliegender Punkte zusammenzusetzen etc., „obschon in einer Linie unendlich viele Punkte gedacht und angenommen werden können.“

„Auch giebt es keine kleinste Linie.“

Becker, F., Die ebene Geometrie in neuer Anordnung. — Progr. Hanau 1870.

„Die allgemeinste Eigenschaft des Raumes ist seine (endlose) Ausdehnung nach allen Seiten, sowie seine überall denkbare Begrenzbarkeit.“

Durch Verneinung jeglicher Ausdehnung im Raume[1]) wird man zur Vorstellung vom Punkte, als eines bloſsen, ausdehnungslosen, unbegrenzbaren, doch aber oft als Grenze dienenden Ortes geführt.“[2])

Zwischen Punkt und Raum werden nun angenommen „drei Arten von Raumgebilden, deren Begriffe man in aufsteigender Reihenfolge durch Vermittlung der Bewegungsvorstellung gewinnen kann.“

„Eine Linie ist das Ergebnis der Bewegung eines Punktes. Ihr räumlicher Verlauf giebt ihre Lage, Gestalt und Gröſse an. Jede Linie hat eine Lage, bestimmbar durch Beziehung auf andere Raumgebilde. Jede Linie hat eine Gestalt, welche von der Art und Weise abhängt, wie der sie erzeugende Punkt sich bewegt. Jede Linie hat eine Gröſse, welche von der Menge der Bewegung abhängt.[3])

„An jeder Stelle im Verlauf einer Linie liegt ein Punkt. Die Anzahl der Punkte innerhalb einer Linie ist unendlich groſs, einer liegt dem andern unendlich dicht an.“[4])

„Der erzeugende Punkt beschreibt alle Punkte der Linie, daher ist sie durch ihn vollständig bestimmt.“

Analog werden die Flächen und Körper behandelt.

Dann heiſst es weiter (§ 12):

„Hat man zwei Körperräume oder Körper von solcher Lage und Beschaffenheit, daſs wo der eine endigt, der andere beginnt, so haben beide eine Fläche als gemeinschaftliche

---

[1]) Man vergleiche den Ausdruck Du Bois-Reymonds: Der Punkt ist die Negation des Raumes im Raume.

[2]) Sicherlich würde diese Auseinandersetzung im Anfang des planimetrischen Unterrichts unverstanden bleiben. Die zitierte Stelle kann als guter Beleg dienen, daſs es naturwidrig ist mit dem Punkte zu beginnen.

[3]) „Menge der Bewegung“ ist doch wohl identisch mit „Dauer der Bewegung“. Damit wird aber in die Untersuchung ein Moment eingeführt, von dem man bei der mathematischen resp. geometrischen Betrachtung der Bewegung vollständig abstrahieren kann, die Zeit. Vergl. weiter oben.

[4]) Das ist ein Ausdruck, der sehr leicht zu Miſsverständnis führen kann. Man gewinnt den Eindruck, als wenn die Linie als aus Punkten bestehend angenommen würde.

Grenze. Man kann daher, wenn man vom Körper als einem begrenzten Raumstück ausgeht — ohne ihn aus der Bewegung einer Fläche entstanden zu denken — von hier aus auch zu dem Begriffe der Fläche gelangen, indem man sie als die gemeinschaftliche Grenze zweier zusammenstofsenden Raumteile betrachtet und dann — da sie ja doch nicht ein Teil dieser Körper oder Körperräume ist — von diesen absehend — sie an sich d. h. ohne Rücksicht auf die Körpergebilde, welche sie begrenzt, nimmt. Verfährt man so und hat man vorher bemerkt, dafs das Körpergebilde die drei Dimensionen (der Länge, Breite und Höhe) hat, so gelangt man zu der Fläche, als dem Gebilde mit nur den beiden Dimensionen der Länge und Breite, wenn man von den als aneinander angrenzend angenommenen Körpergebilden beiderseits die Dimensionen der Höhe bis zum Verschwinden abnehmen läfst. Dadurch wird zugleich klar, dass die Fläche zwei Seiten hat, jedoch so, dafs jeder Punkt und jede Linie der einen Seite zugleich auch der andern angehört."[1])

Analog können Linie und Punkt erzeugt werden.

„Der Punkt bleibt als letztes Ergebnis zurück, eine blofse Stelle im Raume ohne alle Ausdehnung. Das Verschwinden einer Dimension erzeugt auf jeder Stufe (beim Körper, der Fläche und der Linie) jedesmal ein Nullgebilde derselben Art. So hat der Körper die Fläche, die Linie und den Punkt zu seinen Nullgebilden, welche man als erster, zweiter und dritter Ordnung voneinander unterscheiden kann;[2]) die Fläche

[1]) Damit ist eine neue Schwierigkeit für die Vorstellung geschaffen; zwei Seiten, aber so dafs sie identisch sind, also jeder Punkt der einen der andern angehört und umgekehrt. Hier kann man doch nicht mehr von Seiten sprechen; das ist eben nur möglich, wenn man die Fläche mit ihrer stellvertretenden Vorstellung d. h. einem sehr dünnen Körper (Blatt Papier) verwechselt. Die Fläche selbst hat keine Seiten, sondern der Raum liegt seitlich von der Fläche, zu beiden Seiten der Fläche. In der Fläche erhalten wir dann zwei Seiten, wenn eine Linie die Fläche teilt, zu deren beiden Seiten die Flächenteile liegen. — Man vergl. die Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

[2]) Nullgebilde verschiedener Ordnung scheint mir ein recht glücklich gewählter Ausdruck zu sein, da aus ihm sofort ersichtlich ist, dafs

hat als Nullgebilde die Linie und den Punkt; die Linie als Nullgebilde den Punkt."

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie. — Progr. Braunschweig 1887.

Die sehr ausführlichen Betrachtungen des Verfassers verdienen alle Beachtung. Ihre Ausführlichkeit verbietet es leider sie hier wiederzugeben, andererseits sind sie nicht geeignet im Auszug wiedergegeben zu werden. Nur einige Schlufsergebnisse mögen hier angeführt werden:

„Die Raumkörper mit ihren Grenzflächen, Grenzlinien und Grenzpunkten sind in unserem Geiste vorhandene Abbilder von Körpern der Aufsenwelt und zwar Abbilder von besonderer Einfachheit, da sie mit diesen nur in Form und Inhalt übereinstimmen."

„Diese Abbilder gehören zur Klasse der räumlichen Vorstellungen."

„Wenn man sich die Grenzflächen getrennt von ihren Raumkörpern, etc., vorstellt und dieselben dadurch gewissermafsen selbständig macht, so gelangt man zu einer ganzen Gruppe von räumlichen Vorstellungen."

Eine Anmerkung weist die Idealität der Gebilde nach.

„Selbständig gedachte Grenzflächen, Grenzlinien und Grenzpunkte heifsen Raumgebilde".

„Den Körpern und dem Raume der Aufsenwelt, dem Wirklichen, tritt in unserem Geiste der Raum mit seinen Raumkörpern und mit seinen Raumgebilden gegenüber."

„In synthetischer Betrachtung wird der Punkt als Element[1]) bezeichnet, der „bei der Erzeugung der Raumgebilde durch Bewegung eine grundlegende Rolle spielt."

---

auch die Flächen und Linien in der That Null sind und also — insofern sie auch als Gröfsen aufgefafst werden — Gröfsen besondrer Art sind. Gut ist auch, dafs besonders darauf aufmerksam gemacht wird, dafs das Verschwinden irgend einer Dimension das Nullgebilde erzeugt, also bei dem Körper z. B. ebensogut das Verschwinden der Länge oder Breite, als der Dicke, wodurch ein gewifser Gegensatz, der sonst leicht mit diesen Begriffen verbunden wird, wegfällt.

[1]) Man beachte meine Ausführungen weiter oben.

Die Erklärungen werden geteilt in genetische und deskriptive. Die genetischen können wegen ihrer Übereinstimmung mit den üblichen Darstellungen übergangen werden.

„(Deskriptive Definition.) Eine Linie ist die Gesamtheit aller derjenigen Punkte des Raumes, welche ein bewegter Punkt bei seiner Bewegung nach und nach durchläuft."[1])

Analog sind die deskriptiven Betrachtungen bei Linie und Fläche.

Von Interesse ist noch die Bemerkung:

„Die Starrheit der Gebilde ist auch hier (d. h. bei der Bewegung. D. V.) durchgängig Voraussetzung, ebenso die Widerstandslosigkeit derselben gegeneinander und in Bezug auf den Raum."

„Punktkontinuum,[2]) Linienkontinuum, Flächenkontinuum."

---

[1]) Zur Charakterisierung des Unterschiedes zwischen den „genetischen" und den „deskriptiven" Definitionen soll auch die genetische hier zitiert werden: „Wenn ein Punkt seine Lage im Raume ändert, d. h. sich nicht etwa nur in sich selbst dreht, so zeichnet er bei seiner Bewegung im Raume eine stetige Reihe von Kopieen seiner selbst von deren Umgebung aus und erzeugt damit ein Raumgebilde, welches Linie genannt wird."

Die Möglichkeit einer wirklichen Bewegung des Punktes wird von Wernicke offenbar angenommen, wie auch schon aus dem Zusatz, wenn er sich nicht etwa nur in sich selbst dreht, hervorgeht. Wie man sich dieses Drehen eines Punktes in sich selbst zu denken habe, ist mir nicht klar. Die beiden Definitionen könnte man auch als objektive und subjektive bezeichnen. Bei der genetischen erzeugt das Objekt Punkt durch seine Bewegung das Raumgebilde Linie, bei der deskriptiven thut es das betrachtende Subjekt durch Zusammenfassung aller Punkte in einer Gesamtheit. In der That handelt es sich in der Geometrie doch nur um subjektive Bewegung und es wäre also nur die deskriptive Definition zu acceptieren. Wernicke selbst giebt folgende Erklärungen: „Die Angabe der Art und Weise, nach welcher bestimmte Raumgebilde erzeugt werden, nennen wir genetische Definition, d. h. wir stellen durch genetische Definition die Existenz dieses oder jenes Raumgebildes fest." — „Neben der genetischen Definition, welche nur eine besondere Form der synthetischen Definition ist, benutzen wir auch die analytische Definition, welche in diesem Gebiete lediglich beschreibend zu Werke geht und demnach als deskriptive Definition bezeichnet werden kann."

[2]) Ausführlich heifst es: „Die Linie tritt jetzt als eine Reihe stetig

„Man unterscheidet Linien, Flächen und Raumstücke als einfach, zweifach und dreifach ausgedehnte Punktkontinua."

„Der Raum selbst stellt sich demnach als ein dreifach ausgedehntes Punktkontinuum oder als ein zweifach ausgedehntes Linienkontinuum oder endlich als ein einfach ausgedehntes Flächenkontinuum dar."

„Der Punkt läfst sich *nicht* als Kontinuum darstellen; man bezeichnet denselben wohl auch, um seinen Charakter als Element hervortreten zu lassen, in Bezug auf die verschiedenen Arten der Ausdehnung als das nullfach ausgedehnte Gebilde."

„Der Punkt ist das erzeugende Element des Raumes und der Raumgebilde."

Da die Erzeugung in drei Stufen geschieht, so resultiert die Existenz der drei Dimensionen resp. zweier, resp. einer.

„Der Raum und die Raumgebilde sind Gröfsen" (ohne Rücksicht auf Quantität oder Mefsbarkeit).

An diese analytischen und synthetischen Betrachtungen knüpft sich noch ein ausführliches analytisch-synthetisches Kapitel.

Der Abschnitt „Die Lehre vom Raum und den Raumgebilden" behandelt die Geometrie als Wissenschaft. Dann erst geht Wernicke („entnommen der analytisch-synthetischen Betrachtung") zur „Euklidischen Geometrie" über. Die Axiome dieses Teils sollen wenigstens kurz angegeben werden.

„I. „Der Raum ist stetig ausgedehnt." (Zerlegbarkeit, Erzeugbarkeit.)

II. „Die Zerlegbarkeit des Raumes findet ihre Grenzen erst, wenn man beim Punkt angekommen ist."

III. „Der Punkt läfst sich als erzeugendes Element aller Raumgebilde und des Raumes selbst benutzen."

IV. „Der Raum ist gleichartig gestaltet."

V. „Der Raum ist als Punktkontinuum dreifach ausgedehnt (oder tridimensional)."

VI. „Der Raum ist in sich kongruent."

---

aufeinander folgender, d. h. ohne Unterbrechung (kontinuierlich) aneinander gefügter Punkte auf, als ein Punktkontinuum."

VII. „Der Raum ist monodrom gestaltet.“

VIII. „Der Raum is unerschöpflich.“

IX. „Der Raum ist einfach zusammenhängend.“

X. „Der Raum ist unbegrenzt ausgedehnt.“

Diese Axiome werden zusammengefafst in dem Satze:

„Der Raum ist ein dreifach ins Unbegrenzte ausgedehntes Punktkontinuum von einfachem Zusammenhange, in welchem sich durch Analyse und Synthese starr bewegliche Gebilde von monodromem Charakter in beliebiger Menge als Gröfsen aus einem Element (Punkt) erzeugen lassen.“

Durch Aufstellung weiterer besondrer Axiome wird dann die allgemeine Geometrie derartig beschränkt, dafs sie in Übereinstimmung gebracht wird mit der Erkenntnis der Aufsenwelt.

Beckmann, Die geometrischen Grundgebilde etc. — Festschrift z. 34. Phil.-Vers. — Trier.

„Alle, auch die verwickeltsten räumlichen Formen (Figuren) können durch gesetzmäfsige Aneinanderreihung, durch bestimmte Drehungen oder fortschreitende Bewegungen dreier absolut einfacher, gewissermafsen atomistischer und daher auch undefinierbarer Grundformen oder Elemente, nämlich des Punktes, der Geraden und der Ebene hergestellt werden. Der Raum ist ebenfalls eine Grundform, aber unbeweglich und deshalb unfähig, zusammengesetzte Formen, welche untersucht werden können, zu bilden.“

Klügels Wörterbuch giebt keine besonderen Erklärungen der vorliegenden Begriffe.

L. v. Pfeil, Grunerts Archiv 49. p. 180. Zur Theorie der geraden Linie.

„Ein nach Länge, Breite und Dicke begrenzt gedachter Raum ist ein geometrischer Körper. Einen Flächenraum oder eine Fläche denkt man blofs als Länge und Breite, eine Linie blofs als Länge. Betrachtet man blofs den Ort eines Dinges und denkt diesen ohne Länge, Breite und Dicke, so ist dieser Ort ein Punkt. Ein Punkt nach irgend einer Richtung fort-

bewegt, beschreibt eine Linie. Eine bewegte Linie beschreibt eine Fläche, eine bewegte Fläche einen Körper. Man kann also die Linie als den Weg eines Punktes, die Fläche als den Weg einer Linie, den Körper als den Weg einer Fläche betrachten."

Arneth, System der Geometrie.

„Die Form, die Gestalt, der mathematische Körper, der Raum, welchen der physische Körper einnimmt, ist das aus der äufseren Wahrnehmung durch Abstraktion Erhaltene, Gegebene, Mögliche, Denkbare ...."

„Eine bestimmte Form wird von dem übrigen Raume abgegrenzt durch Flächen, die Grenzen dieser sind Linien, die Grenzen der Linien Punkte."

„Der Punkt hat als Grenze der Linie keine Gröfse mehr. Der Ort im Raume, wo ein Punkt sich befindet oder gedacht wird, heifst sein absoluter Ort. Wird der Ort eines Punktes auf andere gegebene Örter bezogen, so erhält man den relativen Ort oder die Lage des Punktes. Die unmittelbare Beziehung eines Punktes zu einem andern wird Richtung genannt."

Nachdem sich Arneth über die Dimensionen ausgesprochen, fährt er fort:

„Die Form, der mathematische Körper, wird individualisiert durch die Anzahl, Beschaffenheit, Gröfse und gegenseitige Stellung der begrenzenden Flächen; die Fläche durch die Anzahl, Beschaffenheit, Gröfse und gegenseitige Lage der begrenzenden Linien; die Linie durch die Ausdehnung und Beschaffenheit innerhalb ihrer begrenzenden Punkte."[1])

---

[1]) Setzt man also einen Körper voraus, der nur von einer Fläche begrenzt wird, so kommt es allein an auf die Gröfse und Beschaffenheit dieser Fläche. Unmöglich aber wird diese Erklärung, wenn man sich eine unbegrenzte Fläche denkt, also z. B. eine Kugelfläche. Die Anzahl der begrenzenden Linien ist null; was soll man sich nun in diesem Falle vorstellen unter dem Ausdrucke, die Fläche wird individualisiert durch die Anzahl, Beschaffenheit, Gröfse und gegenseitige Lage der begrenzenden Linien?

Bartholomäi,[1]) Gradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

Die Definitionen der Raumformen sind:

„1) Der Körper ist die Raumform, welche drei Dimensionen hat.

2) Die Fläche ist die Raumform, welche zwei Dimensionen hat.

3) Die Linie ist die Raumform, welche eine Dimension hat.

4) Der Punkt ist die Raumform, welche gar keine Dimension hat."

„Es ist nun die Frage, von welcher Raumform die Entwicklung ausgehen müsse. Nach vorstehender Definition 4) ist der Punkt ohne alle Ausdehnung, ist also zwar räumlich, nimmt aber nicht selbst einen Raum ein; er ist das Raumlose im Raume, das absolut räumlich Einfache. Daher mufs der Punkt der Anfang der Untersuchung sein."[2])

1) Abhängigkeit der Elemente: „Der Punkt ist räumlich absolut einfach, folglich hat er keine Elemente, sondern ist selbst Element; er ist durch sich selbst vollkommen bestimmt. Er ist eine Stelle im Raume, nicht Raum selbst. Kein Punkt ist vom andern verschieden, oder: alle Punkte sind kongruent."[3])

2) Grösse: „Der Punkt ist ohne alle Ausdehnung, folglich hat er keine Gröfse: er läfst sich rücksichtlich der Gröfse nicht mit einem andern Punkte vergleichen."

---

[1]) Bartholomäi teilt seine Betrachtungen immer ein nach folgenden Gesichtspunkten: 1) Abhängigkeit der Elemente; 2) Gröfse; 3) Form; 4) Lage.

[2]) Wie ich am Anfang dieses Kapitels nachgewiesen habe — und worauf schon an verschiedenen Stellen im Verlauf der kritischen Untersuchungen hingewiesen worden, — sind Flächen und Linien ebensogut raumlos als der Punkt; sie nehmen in der That keinen Teil des Raumes ein und daraus, dafs der Punkt keinen Raum einnehme, darf die Berechtigung, ihn an die Spitze zu stellen, nicht gezogen werden. Dafs der Begriff Punkt unter den raumlosen Gebilden wieder eine besondere Stellung einnimmt, die zu der fraglichen Bevorzugung berechtigt, mufs aus andern Gründen abgeleitet werden.

[3]) Da Gröfse und Gestalt nicht in Betracht kommen können, so handelt es sich nur um Verschiedenheit der Lage bei verschiedenen Punkten. Man vergl. die beiden folgenden Sätze des Textes.

3) Form: „Da der Punkt ohne alle Ausdehnung ist, so ist er gestaltlos, d. h. alle Punkte sind ähnlich."[1])

4) Lage: „Liegen mehrere Punkte aufsereinander, so kann blofs von der Ordnung, in welcher sie aufgefafst werden sollen oder können, die Rede sein. Die ganze Frage wird durch die Kombinationsoperationen und Kombinationszahlen beherrscht. Die ersteren sind logisch, die letzteren mathematisch."

Boymann, Lehrbuch der Mathematik. I. Geometrie der Ebene.[2]) — Köln und Neufs 1877.

Es wird vom Körper ausgegangen und vermittelst Grenzbetrachtungen werden die Begriffe von Fläche, Linie und Punkt gewonnen.

„Der Punkt dient zur völligen Bestimmung eines Ortes im Raume."

„Obgleich hiernach einleuchtet, dafs die Fläche, die Linie, der Punkt nur am Körper vorkommen, so kann und mufs man sich dieselben doch auch abgesondert vom Körper vorstellen".[3])

Alsdann wird der umgekehrte Weg eingeschlagen und die Erzeugung der Gebilde durch Bewegung beschrieben. Es heifst schliefslich:

„Zur Vorstellung des geometrischen Körpers gelangt man mit Hilfe des physischen Körpers, indem man bei diesem von dem Stoffe, aus dem er besteht, absieht. Denn der geometrische Körper hat wie der physische Körper Ausdehnung, Grenze, Gestalt; er unterscheidet sich aber von demselben dadurch, dafs er nicht, wie dieser, aus irgend einem Stoffe besteht."

---

[1]) Etwas, was keine Gestalt hat, kann nicht einem andern ähnlich sein; denn was heifst ähnlich sein anders, als dieselbe Gestalt haben. Der Satz würde also mit andern Worten lauten: Die gestaltlosen Punkte haben dieselbe Gestalt.

[2]) Besprochen in H. Z. IX. p. 209—210.

[3]) Wenn man das nur könnte; später giebt Boymann an, wie man zur Vorstellung des geometrischen Körpers gelange, nicht aber, wie zu derjenigen der Raumgebilde. Daraus geht hervor, dafs auch Boymann die Vorstellung dieser Raumgebilde für nicht möglich hält.

Bretscheider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844.

„Jeder Form kommen die drei Ausdehnungen (Länge, Breite, Dicke) oder Abmessungen (Dimensionen) zu. Es ist indessen nicht nötig, an einer Form immer alle drei Abmessungen zugleich zu betrachten; man kann vielmehr auch bloſs zwei und selbst nur eine derselben in Untersuchung nehmen. Dadurch entstehen dei verschiedene Gattungen geometrischer Gegenstände, nämlich 1) solche, die bloſs eine Abmessung besitzen, sie werden Linien und ihre Abmessung Länge genannt; 2) solche, die zwei Abmessungen haben, sie heiſsen Flächen und ihre Abmessungen Länge und Breite; und 3) solche, denen alle drei Abmessungen zukommen und die man mit dem Namen Räume bezeichnet. Linien, Flächen und Räume werden unter der allgemeinen Benennung geometrische Gröſsen zusammengefaſst.“ [1])

„Linien, Flächen und Räume kann man sich als ohne Aufhören fortgehend denken, oder sich auch vorstellen, daſs irgend ein Teil derselben auf bestimmte Weise von dem übrigen Ganzen abgeschieden sei; im ersten Falle nennt man sie unbegrenzt, im zweiten begrenzt. Da aber die Grenze einer geometrischen Gröſse kein Bestandtteil der letzteren selbst sein darf, so muſs sie immer eine Abmessung weniger haben, als die Gröſse, welche von ihr begrenzt wird.“

„Die Grenze einer Linie dagegen ist ein räumlicher Gegenstand, der gar keine Abmessung besitzen kann, sondern bloſs den Ort im Raume bezeichnen darf, wo die begrenzte Linie aufhört. Jede bestimmte Stelle im Raume aber, wenn sie als solche bezeichnet werden soll, wird ein Punkt genannt.“

Crelle, Über Parallelen-Theorien etc. — Berlin 1816.

„Ein nach allen Seiten ausgedehnter Raum heiſst körperlicher Raum. Eine Grenze, in welcher ein körperlicher Raum an einen andern stöſst, heiſst Fläche. Eine Grenze,

---

[1]) Die umgekehrte Anordnung der Raumgebilde wäre nach den einleitenden Sätzen doch viel natürlicher gewesen.

in welcher ein Flächenraum an einen andern stöfst, heifst Linie. Eine Grenze, in welcher ein Linienraum an einen andern stöfst, heifst Punkt."

Hierzu giebt Crelle folgende wichtige Erläuterungen:[1])

„Die Fläche ist nicht in die körperlichen Räume ausgedehnt, die sie sondert, weil diese körperlichen Räume als Teile einer stetigen Gröfse ohne Zwischenraum aneinander liegen. Aber auch in keinen andren körperlichen Raum, weil sie an keinem andern liegt. Die Fläche ist also überhaupt als körperlicher Raum nicht ausgedehnt." (!)

Analog wird ausgeführt, dafs auch Linie und Punkt als körperlicher Raum nicht ausgedehnt sind; ausdrücklich hebt Crelle dann weiter hervor, dafs, wo Flächen, Linien und Punkte sind, auch körperliche Räume sind, weil die Grenze nicht da ist ohne das Begrenzte. Es heifst weiter:

„Da der Punkt nicht als Linien-, Flächen- oder körperlicher Raum ausgedehnt ist, so ist er gar nicht ausgedehnt. Der Punkt ist also das Unteilbare. Er ist kein Raum, sondern nur ein Ort im Raume."

„Da ein Punkt kein Raum ist und folglich keine Grenzen hat, so unterscheidet sich ein Punkt durch nichts[2]) von einem andern Punkte."

J. C. Becker, Abhandlungen aus den Grenzgebieten der Mathematik und Philosophie. III. Über die Grundbegriffe[3]) etc.

---

[1]) Man vergl. meine Ausführungen über die Raumgebilde.

[2]) Als durch die Lage. — Die erklärenden Worte, die sich für Punkt fast von allen angeführt finden, Ort, Stelle sind — wie nochmals ausdrücklich hervorgehoben sein möge — nicht etwa Erklärungen (Definitionen) des Punktes, sondern nur andere Namen; sie besitzen jedoch erläuternden Wert.

[3]) Besprochen in Schl. Z. XV, 93 und ausführlich in H. Z. III, p. 465—473. — Sextus Empiricus schliefst seine Rezension (die letztere) trotz mannigfacher Bedenken, die er geäufsert hat, mit den Worten: „Diese Abhandlung scheint Referent als die wichtigste, lehrreichste und darum lesens- und empfehlenswerteste. Sie nötigt zweifelsohne denjenigen, der mit dem ernsten Willen, über geometrische Grundbegriffe klar zu werden, an sie herantritt, zum tieferen Nachdenken und dürfte vorzüglich geeignet sein zur Neubildung oder Befestigung geometrischer Grundbegriffe."

„Wie wir uns des Raumes erst mit der Einwirkung äufserer Objekte auf unsere Sinne als des Ortes, wo wir die Ursache dieser Einwirkungen suchen, bewufst werden, so gelangen wir auch erst durch die Wahrnehmung wirklicher Objekte zu der Vorstellung reiner Raumgebilde, indem wir von allen empirischen Daten derselben abstrahieren. Nur durch Abstraktion aus wirklichen Körpern erhalten wir succesive die Vorstellung von mathematischen Körpern, Flächen, Linien und Punkten. Obwohl durch Abstraktion erhalten, so sind diese Vorstellungen doch noch anschauliche Vorstellungen.[1]) Was wir aus einem angeschauten physischen Körper als mathematischen Körper übrig behalten, nachdem wir von allem, was unsere Sinne an ihm wahrgenommen, abstrahiert haben, ist gerade das, wovon nicht abstrahiert werden darf, ohne dafs das übrig bleibende aufhört, Anschauung zu sein: denn jeder Körper mufs notwendig raumerfüllend vorgestellt werden. Dieser vom Körper gerade eingenommene Raum wird aber nicht selbst als mathematischer Körper festgehalten, sondern das Bild, das wir von diesem Raume erhalten, die räumliche Gestalt, die wir nicht blofs hier, sondern an jeder beliebigen anderen Stelle des Raumes, die wir ebensogut als bewegt d. h. ihre Stelle ändernd, wie als ruhend uns vorstellen können: „Ein mathematischer Körper ist nicht ein begrenzter Raum, sondern das Bild eines begrenzten Raumes.“ Durch weitere Abstraktion gewinnen wir in der Oberfläche des Körpers oder in einem beliebigen Teile derselben die immer noch anschauliche Vorstellung einer Fläche. Anschaulich für sich allein ist dieselbe aber nur, insofern sie eine Gestalt hat, ein Bild ist: eine Fläche erscheint in jedem Momente, wo sie

[1]) Wie aus meinen früheren Auseinandersetzungen hervorgeht, befinde ich mich hier nicht in Einklang mit dem berühmten Verfasser. Ich kann durchaus die Raumgebilde Flächen, Linien und Punkte nicht für anschauliche Vorstellungen halten, sondern erkläre sie für Vorstellungen unseres Denkens d. h. für Begriffe. — Übrigens geht Becker an einer andern Stelle (in derselben Abhandlung) auf diese Frage näher ein und kämpft selbst gegen die Auffassung, als wenn die Raumgebilde (aufser Körper) für sich betrachtet anschauliche Vorstellungen wären.

anschaulich vor uns steht, als Trennungsstelle zweier Räume; als Gegenstand der Mathematik ist sie jedoch meist nicht diese Stelle, sondern das Bild dieser Stelle. Auch kann man sie auffassen als Grenze ....

Dasselbe gilt von der Linie, wenn man sie als Bild der Grenze einer Fläche oder als Bild der Trennungsstelle zweier Flächenteile, oder als Begrenzung oder Teilstelle eines Flächenbildes auffafst. Der Punkt endlich ist nur noch als Begrenzung oder als Teilstelle einer Linie oder als Spitze an einer Fläche, nicht mehr für sich allein anschaulich vorstellbar, da er keine Gestalt hat."

Bei allen drei Raumgebilden macht Becker darauf aufmerksam, dafs sie ebenso gut im Zustand der Ruhe, als in demjenigen der Bewegung aufgefafst werden können. „Allerdings ist die Bewegung eines Raumgebildes, wie dieses selbst, eine blofs eingebildete."[1])

„Die Objekte der Geometrie, die reinen Raumgebilde werden aber im Raume nur angetroffen, insofern man sie entweder durch Abstraktion aus wirklichen Objekten übrig behält, oder insofern man sie selbst erst erzeugt."

„Dadurch, dafs wir räumliche Gestalten ihren Ort im Raume stetig ändernd uns vorstellen können, ist es allein uns möglich, selbständig neue Raumgebilde zu erzeugen. Denn ein neues Raumgebilde entsteht vor unserem inneren Auge, indem wir ein anderes bereits bekanntes im Zustande der Bewegung uns vorstellen, und dabei die Bahn dieser Bewegung verfolgen. Denken wir uns einen Punkt bewegt, so erhalten wir in seiner Bahn die Vorstellung einer Linie, und aus der gedachten Bewegung einer Linie geht das Bild einer Fläche hervor etc."

„Insofern also unter Körper, Flächen und Linien nicht

---

[1]) Man vergl. den Artikel „Bewegung" und die kurzen Bemerkungen über Bewegung weiter oben. — Beckers Ausdruck, dafs die Bewegung nur etwas Eingebildetes sei, scheint sich zu decken mit meiner Ansicht, dafs die Bewegung nur als eine Zuthat des betrachtenden Subjektes aufzufassen, dafs sie nicht objektiv wirklich, sondern nur im Denken vorhanden.

Teile des Raumes oder Stellen in demselben, sondern die Bilder, d. h. die anschaulichen Vorstellungen, welche wir von ihnen haben, verstanden werden, können dieselben wirklich durch Bewegung anderer Raumvorstellungen erzeugt werden."

Becker widerlegt alsdann Trendelenburg, der vom Punkt — den er einfach setzt — ausgeht und durch die Annahme, dafs die Bewegung das erste in unserem Bewufstsein sei, zu „sonderbaren Ideen" gekommen ist, die „eine heillose Verwirrung der Begriffe angerichtet haben." Auf Trendelenburgs Ausführungen mufs bei der Behandlung des Begriffs Bewegung noch näher eingegangen werden. — Auch gegen Prof. Wolf in Zürich polemisiert Becker, der, allerdings auch ganz im Gegensatze zu meinen Ausführungen, folgendes in seinem Handbuche sagt: „Früher stellte man gewöhnlich den Begriff der dreifachen Ausdehnung an die Spitze der Geometrie und stieg davon durch Zerlegen zu dem Punkte hinab"; es geht daraus hervor, dafs Wolf mit dem Punkte beginnt. Becker schliefst seine Zurückweisung dieses Verfahrens mit den Worten: „Man geht aber auch nicht 'vom Begriff der dreifachen Ausdehnung', sondern von der anschaulichen Vorstellung des Raumes und seiner Teile aus, um von ihnen zu dem durchaus nicht von selbst klaren Begriff des Punktes zu gelangen. Hat man diesen aber einmal gewonnen, so ist es allerdings das Einfachere und es läfst sich nichts dagegen einwenden, wenn man nun wieder umgekehrt von ihm aus zu dem weniger einfachen stetig fortschreitet."

Der Schlufs der Abhandlung beschäftigt sich noch einmal mit den Riemann-Helmholtzschen Untersuchungen.

J. B. Sturm, Die Grundanschauungen der Mathematik.

„Reale Einheiten sind die geometrischen Gebilde. In ihnen treten die unterständlichen Einse nicht so klar hervor, als in den idealen, aber sie sind vorhanden, jedoch nur idealiter. Der Geist zerlegt nämlich das geometrische Gebilde in Punkte; aber diese Zerlegung ist keine reale, oder eine solche, nach welcher z. B. ein Dreieck in Stücke geteilt wird, sondern nur eine ideale, und eine im Geiste vollzogene. Wenn auch

die Punkte nicht gezählt werden können, ihre Summe ist realiter vorhanden,[1]) sie besteht nämlich in dem geometrischen Gebilde selbst. Diese ideale Zerlegung der geometrischen Gebilde ist es, welche direkt ihre Gleichheit und die Bedingungen dieser aufzeigt. Dasjenige, welches die mehreren Punkte fafst, ist das gröfsere. Unter Grösse eines geometrischen Gebildes ist also der Umfang seines Ausgedehntseins zu verstehen."

„Die Linien, Flächen können aber auch zu Flächen, Körpern zusammengesetzt werden."

„Raum und Zeit entstehen nicht aus der Bewegung; diese setzt vielmehr Raum und Zeit voraus ..... Allein die Erkenntnis des Räumlichen und die Erkenntnis des Punktes existieren zumal; mit der Vorstellung des Ausgedehntseins nach drei Richtungen ist die des Punktes unmittelbar verbunden; ebenso die der Linie,[2]) denn Linie ist nichts anderes als Richtung. Wie kann man also sagen, dafs durch die Bewegung eines Punktes die Linie entstehe? Zudem ist mit dem Begriffe der Bewegung ein wohin verbunden; dieses wohin ist aber nicht denkbar ohne Raum."

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie etc.

„Eine Elementarsetzung im Nebeneinander in dem Sinne, dafs sie weiter keine Bestimmung enthalten soll, als den allgemeinen absolut einfachen Akt des Setzens, heifst in der geometrischen Sprache Punkt. Wir klassifizieren einen Sinneseindruck nach diesem Begriffe, wenn er ein absolut einfacher ist. Der Punkt ist deshalb ebenso Grenze eines jeden geometrischen Gebildes, wie die Einheit Grenze einer jeden arithmetischen Form, und die Null Grenze eines jeden arithmetischen Inhaltes. Zwei Punkte nebeneinander ohne Zwischenraum ist deshalb ein Widerspruch; es wäre ein Nichts,

---

[1]) Damit stellt Sturm sich auf den Standpunkt, den Punkt als etwas Ausgedehntes zu fassen, sonst könnte die Summe von Punkten nicht realiter als Linie existieren.

[2]) D. h. doch nur der geraden Linie.

welches trotz seiner Nicht-Existenz zwei wirkliche Grenzen hätte."[1])

„Ebensowenig wie die Eins eine Zahl,[2]) die Null eine Quantität, kann der Punkt ein geometrisches Element[3]) genannt werden; er ist lediglich Grenzbestimmung und kann nie etwas anderes werden."

„Geometrischen Körper nennen wir das Gebilde, welches durch die Wechselwirkung dreier einfacher Ausdehnungen entsteht, also eine Funktion aus drei Bestimmungen der Ausdehnung."

Beez,[4]) Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen i. V.

„An der Spitze der Euklidischen Geometrie steht die Erklärung: Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Bei dieser Definition, wie auch bei einigen anderen vermissen wir vor allen Dingen die Angabe des allgemeinen Begriffs, unter welchem der speziellere Begriff „Punkt" zu subsummieren ist. Wir erfahren nicht, in welcher Beziehung der Punkt, der doch Gegenstand der Raumlehre sein soll, zum Raume steht, ob er überhaupt etwas Räumliches ist. Mit demselben Rechte liefse sich auch die „Null" oder die „Eins" der Algebra, das „Jetzt" in der Zeit oder ein beliebiger anderer Zeitpunkt, ja jeder abstrakte Begriff, der sich nicht in Teile zerlegen läfst, als etwas definieren, was keine Teile hat. Diesen Fehler haben spätere Geometer — aber offenbar nicht im Sinne Euklids — dadurch zu verbessern gesucht, dafs sie definieren: Der Punkt ist ein Ort oder eine Stelle im Raume, die keine Ausdehnung hat. Dann könnte man auch eine Linie, eine Fläche, einen Körper als eine Stelle im Raume erklären, welche bezüglich eine, zwei

---

[1]) Man vergleiche den Artikel „Abstand". Wird der Begriff „Abstand" als ein a priori gegebener ausdrücklich in die Geometrie eingeführt, so werden sich derartige Untersuchungen, wie die vorliegende, unendlich einfacher gestalten.

[2]) Man wird mit Recht fragen, was denn die Eins sei, wenn nicht eine Zahl.

[3]) Geometrisches Element, sehr wohl, — aber niemals Raumelement.

[4]) Man vergl. auch Beez, Die Elemente der Geometrie; besprochen in Schl. Z. XIV, 46.

oder drei Abmessungen besitzt. Der Punkt kann wohl, wie jedes andere Raumgebilde, eine Stelle im Raume einnehmen, ist aber nicht identisch mit dieser Stelle, da er sich fortbewegen kann, während die Stelle bleibt.[1]) Wollte man aber trotzdem diese Definition beibehalten oder auch zugeben, der Punkt sei ein Raumgebilde — nicht Raumgröfse — welches keine Ausdehnung besitzt, so würde man doch immer die Vorstellung des Raumes neben der des Punktes im Raume einführen, also den Aufbau der Geometrie an beiden entgegengesetzten Enden Punkt und Raum gleichzeitig beginnen, während sich doch zeigen läfst, dafs die Vorstellung des letzteren allein hierzu ausreicht. Dafs aber die Verbesserung der Euklidischen Definition nicht im Sinne Euklids liegt, glaube ich aus folgenden Gründen annehmen zu müssen. Euklid kennt blofs Punkte, Linien, Flächen, Körper. Der Raum, in welchem dieselben existieren, ist ihm als Vorstellung unbekannt, er besteht für ihn blofs als Möglichkeit, Konstruktionen ausführen zu können. Nun ist der Punkt von den genannten vier Dingen das einfachste, eine *μονάς*, etwas Ursprüngliches, Unteilbares und deshalb erscheint es ihm, dem Schüler Platos, als das Wichtigste. Hiermit steht auch die Auffafsung seines Kommentators Proclus, der eine lange Auseinandersetzung zu der ersten Definition Euklids gegeben hat, im Einklang.

„Er schreibt: „Dafs in Bezug auf den Übergang vom Zusammengesetzten zum Einfachen der Geometer vom dreifach Ausgedehnten zur Grenze desselben, zur Fläche, von dieser Fläche zu ihrer Grenze, der Linie, von der Linie zu dem jeglicher Ausdehnung entbehrenden Punkt gelangt, ist oft gesagt worden und allgemein bekannt. Da aber diese Grenzen wegen ihrer Einfachheit oft wichtiger erscheinen als die Natur des Zusammengesetzten, oft aber auch, wenn sie ihre Existenz dem verdanken, was von ihnen begrenzt wird, etwas Zufälligem gleichen, so ist in beiden Fällen festzustellen,

[1]) Ich halte Punkt und Stelle (oder Ort) nur für zwei verschiedene Bezeichnungen desselben Begriffs; allerdings nehme ich auch die thatsächliche Bewegungslosigkeit des Punktes an, würde also hier folgern müssen: Punkt und Stelle sind identisch, daher der Punkt sich auch nicht bewegen kann.

in welchen Arten des Seienden das Eine oder das Andere erkannt wird.“ Er führt nun weiter aus, dafs in nichtmateriellen Dingen das Einfache wichtiger sei als das Zusammengesetzte . . . — In materiellen Dingen dagegen sei das Zusammengesetzte wichtiger als das Einfache . . . — Es mögen diese Ausführungen genügen, um zu zeigen, dafs Euklid als Platoniker notwendig beim Punkte beginnen und von ihm aus die Raumgebilde entwickeln mufste, freilich ohne sich bewufst zu werden, dafs er doch immer den dreidimensionalen Raum stillschweigend postulierte. Daher mifslingen ihm auch die Definitionen der Linie und Fläche, da er den allgemeinen Begriff Raumgröfse nicht kennt. Eine Linie ist nach ihm „eine Länge ohne Breite“ und eine Fläche, was „Länge und Breite hat“, als ob Länge und Breite ursprüngliche, einfache Begriffe wären und nicht vielmehr erst durch Abstraktion aus dem flächenhaften Wahrnehmungsbild unserer Gesichtsempfindung oder aus der Vorstellung des festen Körpers, die wir durch Kombination von Gesichts- und Tastempfindungen erhalten, abgeleitet würden. Die dritte Erklärung: „Das Äufserste einer Linie sind Punkte“ und die sechste: „Das Äufserste einer Fläche sind Linien“ stellen den erfahrungsgemäfsen Zusammenhang des Punktes mit der Linie und der Linie mit der Fläche fest.“

Nachdem Beez dann noch die Gerade und die Ebene besprochen, Ausführungen, die an andrer Stelle zitiert werden, schliefst er folgendermafsen:

„Durch die vorstehenden Betrachtungen glaube ich zu dem Schlufs berechtigt zu sein, dafs man bei der Begründung der Geometrie nicht vom Punkt, sondern vom Körper ausgehen müsse,[1]) an dem wir ja überhaupt unsere Raumvorstellung zuerst erlernt haben und ohne den wir vermutlich dieselbe gar nicht oder wenigstens nicht in gleicher Deutlichkeit besäfsen.“

Crelle, Lehrbuch der Elemente. — Berlin 1826.

---

[1]) Dafs ich in dieser Frage mit Beez vollständig übereinstimme, geht zwar aus meinen früheren Ausführungen hervor, soll aber auch hier noch einmal ausdrücklich betont werden.

p. 1. „Die Grenzen von Räumen heifsen Flächen. Ein begrenzter Raum heifst körperlicher Raum zum Unterschiede von dem Raume überhaupt, in welchem sich begrenzte Räume befinden. Die begrenzenden Flächen heifsen auch Flächenräume.

Die Durchschnitte von Flächen, welche also Teile der Flächen begrenzen, heifsen Linien.

Die Durchschnitte von Linien, welche nun Teile der Linien begrenzen, heifsen Punkte.

Flächen sind daher Grenzen körperlicher Räume, Linien sind Grenzen von Flächen, und Punkte Grenzen von Linien, und so, wie man aus dem unbegrenzten Raume beliebige körperliche Räume absondern und weiter in dieselben beliebige Flächen legen kann, so kann man in Flächen-Räume beliebige Linien und in Linien beliebige Punkte legen.

Von Flächen begrenzte körperliche Räume, und von Linien begrenzte Flächen-Räume heifsen auch Figuren, auch wohl blofs letztere Figuren, erstere, abgekürzt, Körper.

Je nachdem die Flächen, welche Körper, oder die Linien, welche Flächen, oder die Punkte, welche Linien begrenzen, mehr oder weniger Raum einschliefsen, sind die Körper, Flächen, Linien gröfser oder kleiner. Die Gröfse der Körper, Flächen und Linien in diesem Sinne heifst Ausdehnung.[1])

Da sich Linien nicht in die Flächen, die sie begrenzen, sondern nur in sich ausdehnen, so haben sie nur eine Ausdehnung. Diese eine Ausdehnung heifst Länge. Flächen dehnen sich nicht in die körperlichen Räume aus, die sie begrenzen, wohl aber neben beliebige Linien, die man in sie legen kann. Diese zweifache Ausdehnung wird bezeichnet, wenn man sagt: Flächen dehnen sich in die Länge und in die Breite aus. Körper dehnen sich auch neben beliebige Flächen aus, die man in sie legen kann. Deshalb sagt man, sie dehnen sich in die Länge, in die Breite und in die Höhe aus. Die Ausdehnung der Körper und Flächen über-

[1]) Hier ist der Ausdruck, dafs Punkte auf einer Linie, oder Linien auf einer Fläche Raum einschliefsen, zu beanstanden, denn weder Flächen noch Linien nehmen überhaupt Raum ein, also auch nicht Teile von ihnen.

haupt heifst auch Inhalt, auch wohl bei Körpern insbesondere, zum Unterschiede, Volumen.

Die verschiedenen Arten der Ausdehnung in die Länge, Breite und Höhe heifsen Abmessungen. Die Körper haben also drei Abmessungen, die Flächen zwei und die Linien eine.

Da gleich grofse Körper, Flächen und Linien verschiedene Gestalt und gleichgestaltete Körper, Flächen und Linien verschiedene Gröfse haben können, so kommt es nicht auf die Ausdehnung oder Gröfse der Körper, Flächen und Linien allein an, sondern auch auf ihre Gestalt".[1])

Francoeur, Vollständiger Lehrkursus der reinen Mathematik etc. — Bern, Chur und Leipzig 1839. I, 3.

„Jeder Körper hat drei Abmessungen oder Dimensionen, welche man mit den Namen Länge, Breite, Höhe (Dicke oder Tiefe) bezeichnet. Die Grenzen eines Körpers, die ihn vom unendlichen Raume unterscheiden und ohne die er nicht gedacht werden kann, werden Flächen genannt. Treffen die Flächen eines Körpers je zwei zusammen, so haben solche ebenfalls ihre Grenzen, die Linien heifsen. Die Linien endlich haben an dem Ort, wo sie einander begegnen, ihre Grenzen, die Punkte genannt werden.

Diese verschiedenen Arten von Grenzen geben das Mittel ab, wonach wir die Figur des Körpers beurteilen.

Wiewohl es keine Körper ohne diese drei Dimensionen geben kann, so abstrahieren wir jedoch öfters von einer oder zwei derselben. Handelt es sich z. B. von der Gröfse eines Grundstückes, von der Höhe eines Gebäudes, so hat man es nur mit einer Fläche oder einer Linie zu thun.[2])

„Wir unterscheiden den geometrischen Körper von dem physikalischen. Jener ist der blofse Raum, den der andere einnimmt, abgesehen von aller darin enthaltenen Materie.

---

[1]) Insofern man Gebilde für sich betrachtet; bei der Betrachtung mehrerer Gebilde kommt es auch auf die gegenseitige Lage an.

[2]) Diese Bemerkung ist recht gut, da sie uns ein Beispiel aus der Praxis giebt.

Man betrachtet in der Geometrie an dem physikalischen Körper nur seine Form und Gröſse. — Der geometrische Punkt, dem jede Ausdehnung fehlt, ist bloſs in der Idee möglich.[1]) Von gröſseren oder kleineren Punkten kann also hier nicht die Rede sein."

„Man kann eine Linie gewissermaſsen als die Bahn ansehen, die ein Punkt bei seiner Bewegung im Raume beschreibt."

---

v. Forstner, Grundriſs etc. — Berlin 1826.

„Stellen wir uns einen Teil dieses Raumes (s. das betr. Zitat) überall als begrenzt vor, so erhalten wir einen Körper, wie die Geometrie ihn nur betrachtet. Das was den Körper begrenzt, heiſst seine Fläche; das was die Fläche begrenzt, heiſst Linie, und die Grenze der Linie heiſst ein Punkt.

„Der Körper ist ein Teil des Raumes, also mit ihm gleichartig, daher auch er nur Ausdehnung hat.

Die Fläche ist kein Teil des Körpers, sondern nur Grenze desselben; aber sie ist eine stetige Gröſse.

Die Linie ist kein Teil der Fläche, sondern nur die Grenze derselben; doch ist sie eine stetige Gröſse.

Der Punkt ist nur Grenze, aber kein Teil der Linie.

Es kann also nie eine Linie aus der Zusammensetzung von Punkten, nie eine Fläche aus der Zusammensetzung von Linien und nie ein Körper aus der Vereinigung von Flächen entstehen, wenn man auch noch so viele derselben an oder auf einander bringt.[2])

Daher sind Körper und Flächen, Körper und Linien, sowie Flächen und Linien, ungleichartige[3]) Gröſsen."

---

[1]) Ist denn ein geometrischer Körper anders als in der Idee möglich? Er ist doch auch nur etwas Gedachtes.

[2]) Daſs dies so besonders hervorgehoben wird, wie hier geschieht, ist sehr richtig; es wird dadurch einer falschen Vorstellung von vornherein vorgebeugt.

[3]) Es wäre wohl nicht zwecklos gewesen auf diese Ungleichartigkeit noch etwas näher einzugehen, besonders da die Gleichartigkeit des Raumes vielleicht dazu verleiten könnte, auch für die Raumgebilde Gleichartigkeit vorauszusetzen.

Auch die Fläche hat unendlich viele Ausdehnungen, nur nicht nach allen Richtungen hin. Von diesen Ausdehnungen betrachten wir aber nur zwei."[1])

„Die Linie hat nur eine Ausdehnung."

„Der Punkt kann, als Grenze der Linie, gar keine Ausdehnung haben, weshalb er auch keine Gröfse ist."

„Wenn auch Körper, Fläche, Linie ihre Grenzen haben, so kann man sie sich dennoch als unendlich ausgedehnt vorstellen, welche Vorstellung oft ihren Nutzen hat. Der Punkt kann aber durchaus nicht ausgedehnt gedacht werden, ohne dabei gleichsam zur Linie, Fläche oder Körper zu werden, welche Vorstellung hier nicht gültig sein kann."

„Da die Geometrie den Körper nur in Hinsicht seiner Ausdehnung betrachtet, so abstrahiert sie von allem, was wir aufser derselben bei den Körpern, wie sie uns im Leben erscheinen, noch finden, als Materie, Gewicht, Farbe u. s. w." „Es sind daher die vier geometrischen Begriffe: Körper, Fläche, Linie und Punkt nur Ideale, welche wir in der Wirklichkeit nirgend allein finden.

Und dennoch lassen sich die geometrischen Lehren auf alle Körper u. s. w., wie wir sie im Leben finden,[2]) anwenden, eben weil sie das betrachten, was allen Körpern u. s. w. gemein ist, die Ausdehnung nämlich. — Aber eben hierin finden auch viele, bei der Anwendung der Geometrie vorkommenden kleinen Unrichtigkeiten ihren Grund, weil das, was wir im Leben vorfinden, das Ideal nicht[3]) ist, von welchem die Lehren der Geometrie ausgesagt werden . . . ."

„Man vergesse nie, dafs das, was von einer Figur bewiesen wird, nicht von der Figur als solche, sondern stets von dem Ideale gilt, dessen unvollkommenes Bild die Figur ist, die als sinnliches Zeichen nie das Ideal erreichen kann."

[1]) Es ist merkwürdig, dafs die analoge Betrachtung beim Körper fehlt. Vielleicht würde auch ein Eingehen darauf, dafs der Körper nach unendlich vielen Richtungen ausgedehnt ist, dafs die Fläche ebenfalls nach unendlich vielen Richtungen ausgedehnt ist, dafs aber etwas ganz Verschiedenes vorliegt, nicht ohne Nutzen im Unterricht sein.

[2]) Etwas anderes wie Körper finden wir im Leben nicht.

[3]) Wenn wir die Raumgebilde wirklich vorfänden, so wären es eben keine Ideale.

Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik. I. — Liegnitz 1889.

Nachdem die geometrischen Gebilde vom Körper aus als Grenzen bestimmt sind, wird auch der umgekehrten Betrachtungsweise, der Entstehung der Gebilde durch Bewegung gedacht.

Grunert, Lehrbuch der Mathematik. II. — Brandenburg 1870.

„Ein Punkt ist das, was gar keine Ausdehnung, gar keine Teile hat.“[1])

„Was man im gemeinen Leben Punkte nennt, sind keine geometrischen Punkte, sondern kleine aus Tinte, Kreide etc. bestehende physische Körper, die aber dem wahren geometrischen Begriffe eines Punktes desto näher kommen, je kleiner sie sind. Den geometrischen Punkt mufs man sich in der That ohne alle Ausdehnung vorstellen, da derselbe vorzüglich gebraucht wird, um im Raume einen Ort bestimmt anzugeben.“

„Unmittelbar ergiebt sich auch hieraus, dafs von gröfseren und kleineren Punkten in der reinen Geometrie gar keine Rede sein kann, dafs aber auch wahre geometrische Punkte blofs in der Vorstellung oder in der Idee möglich sind, mit der Hand sich nicht bilden oder machen lassen.“

„Denkt man sich jetzt, dafs ein Punkt sich auf eine beliebige Weise im Raume bewegt, so nennt man den Weg, auf welchem er sich bewegt, gewissermafsen die Spur, welche er bei seiner Bewegung zurückläfst, eine Linie, woraus sich zugleich unmittelbar ergiebt, dafs, weil der Punkt gar keine Ausdehnung hat, die Linie nur nach einer Richtung oder Dimension, nämlich blofs nach der Länge, ausgedehnt ist, oder dafs die Linie, wie man dieselbe auch wohl zu definieren pflegt, eine Länge ohne Breite ist.“ „Alles,[2]) was nur nach

---

[1]) Grunert schliefst sich nicht nur in der Anordnung (von Punkt zu Körper) an Euklid an, sondern giebt auch hier und da wörtliche Euklidsche Definitionen.

[2]) Die folgenden Ausführungen schliefsen sich ganz unvermittelt an das Vorhergehende an.

zwei Richtungen oder Dimensionen, nämlich nach Länge und Breite, ausgedehnt ist, heifst eine Fläche. Ein sinnliches Bild einer Fläche hat man an der äufsersten Oberfläche eines beliebigen physischen Körpers, indem Jeder, der eine solche Oberfläche betrachtet, offenbar ganz von einer Dicke derselben abstrahiert und blofs ihre Ausdehnung nach der Länge und Breite ins Auge fafst. Man kann sich eine Fläche auch durch die Bewegung einer Linie im Raume entstanden denken . . . ."

„Jeder nach drei Richtungen oder Dimensionen, nach Länge, Breite und Dicke, ausgedehnte und nach allen Seiten hin völlig begrenzte Raum[1]) heifst ein geometrischer Körper . . ."

Erst hierauf kommt Grunert auf die Grenzbetrachtung, erwähnt aber nur, dafs die Fläche die Grenze des Körpers.

Heger, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. — Breslau 1882.

„Es giebt drei Arten Raumgröfsen: Körper, Flächen, Linien.

Körper werden begrenzt von Flächen (Oberflächen), Flächen werden begrenzt von Linien, Linien werden begrenzt von Punkten. Ein Punkt ist ein im Raum gedachter Ort, keine Gröfse.

Die Bahn eines bewegten Punktes ist eine Linie; die Bahn einer bewegten Linie ist eine Fläche; die Bahn einer bewegten Fläche ist ein Körper.

Eine Linie hat eine Ausdehnung etc. . . . ."

Helmes, Die Elementarmathematik. II.[2]) — Hannover 1874.

„Ein vollständig abgeschlossener oder abgegrenzter Raum[3]) heifst ein geometrischer Körper.

---

[1]) Es würde wohl besser sein zu sagen: Raumteil, damit der Gedanke an verschiedene Räume gar nicht aufkommen kann.

[2]) Besprochen in Schl. Z. IX, 82 und in H. Z. VII. p. 134.

[3]) Vergleiche die betreffende Anmerkung bei Grunert.

Sieht man ab (abstrahiert man) von der Ausdehnung oder Erstreckung des Körpers in sein Inneres hinein, von seiner Dicke oder Tiefe, und betrachtet nur die Gröfse und Gestalt seiner Grenze, so erzeugt man die Vorstellung einer zweiten Art räumlicher Gröfsen, die der Flächen, denen sonach im Vergleich mit den Körpern eine räumliche Ausdehnung, genannt Dicke oder Tiefe, fehlt.

Die Fläche ist die Grenze des Körpers, nicht ein Teil desselben.

Die Fläche ist ein durch Abstraktion gewonnener, ein abstrakter Begriff."

Durch analoge Betrachtungen werden die räumlichen Vorstellungen von Linie und Punkt erzeugt und dieselben als Grenzen bestimmt.

„Der Punkt ist keine räumliche Gröfse mehr. Denn man findet bei der Prüfung der wie oben gewonnenen Vorstellung der Linie nur noch die eine Ausdehnung, genannt Länge, vor, und indem man von ihr aufs neue absieht, bleibt in der Vorstellung für die Grenze der Linie, den Punkt, gar keine räumliche Ausdehnung mehr zurück; es bleibt nichts übrig, von dem Gestalt und Gröfse durch eine mögliche Veränderung desselben erfafst und unterschieden werden könnte; der Punkt ist völlig ausdehnungs- und gestaltlos; er ist wieder ein nur durch Abstraktion gewonnener, ein abstrakter Begriff, er bezeichnet eine gedachte Stelle des Raumes."

Sonach bildet sich die Vorstellung und der Begriff dreier Arten und nur dreier Arten räumlicher Gröfsen, der Körper, der Flächen und der Linien; dazu die Vorstellung und der Begriff der ausdehnungslosen Stelle im Raume, des Punktes.

Bei der Fläche unterscheidet man zwei verschiedene, entgegengesetzte Seiten derselben nach den beiden Körpern, deren gemeinschaftliche Grenze sie ist. Bei der Linie und bei dem Punkte unterscheidet man zwei verschiedene Seiten derselben nach den Flächen und nach den Linien, deren gemeinschaftliche Grenzen sie sind. In Beziehung auf eine bestimmte Fläche, in welcher eine Linie liegt, unterscheidet man die beiden entgegengesetzten Seiten dieser Linie; in Beziehung auf

eine bestimmte Linie, worin ein Punkt liegt, die beiden entgegengesetzten Seiten dieses Punktes.“[1])

Alsdann ordnet Heger die Gebilde nach dem Grade ihrer Einfachheit vom Punkt bis Körper und betrachtet die Entstehungsweise der räumlichen Gebilde durch Bewegung.

Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823.

„Ein Punkt ist die Vorstellung von einem Teilchen eines natürlichen Körpers, welches so klein gedacht wird, dafs es keinen Raum mehr einnimmt.“

Eine Linie ist die Vorstellung von der Spur eines sich bewegenden Punktes.

Eine Fläche heifst die Vorstellung von der Spur einer Linie, welche sich nicht in der Richtung ihrer Länge bewegt.

Der von einer oder mehreren Flächen eingeschlossene Raum heifst ein Körper.“

Weitere Literatur:

Funcke, Grundlagen der Raumwissenschaft. — Hannover 1875.
Fresenius, Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. — Bespr. in Schl. Z. XIV, 4.
Krause, Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der geometrischen Axiome. — Bespr. in Schl. Z. XXIV, 34.

Programme:

Fuhrmann, W., Über Abhängigkeit geometrischer Gebilde. — Königsberg 1870.
Kress, H., Zur Elementargeometrie. — Meiningen 1871.
Komeck, Über einige Definitionen in der Geometrie. — Kempen 1872.
Wernekke, Mertschinskys Einleitung zur Geometrie. Übersetzt und mit Anmerkungen. — Borna 1874/75.
Ecke, J. B., Versuch einer heuristischen Behandlung der Planimetrie. — Dillingen 1875.
Kudelka, Über eine planimetrische Grundlage für die neuere Geometrie. Linz 1877.
Müller, E., Versuch einer organ. Entwicklung der Geometrie etc. — Neu-Strelitz 1877.
Dietrich, Anfangsgründe der Geometrie. — Greiffenberg 1878.
Polster, Geometrie der Ebene etc. — Würzburg 1878.

---

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen am Anfang dieses Kapitels

Junghänel, Kursus zur Einführung in die Geometrie. — Döbeln 1879.
Killing, Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie. — Brilon 1880.
Hoffmann, J., Die Geometrie in ihrer Abhängigkeit von den Maſsverhältnissen des Raumes. — Graz 1881.
Ballauf, Über die mathematischen Definitionen und Axiome. — Varel 1879.
Bammert, Über das mathematische Unendliche. — Ehingen a/D. 1884.
Casse, Das Unendliche in der Mathematik und das Gröſsenelement. — Osterode a/H. 1879.
Endert, Die logischen Prinzipien der Mathematik. — Detmold 1882.
Vogt, Der Grenzbegriff in der Elementarmathematik. — Breslau 1885.
Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid. — Stuttgart 1881.

IV. Kapitel.

Die Ebene.

Von allen Flächen kommt nun für den planimetrischen Unterricht nur eine einzige in Betracht, die Ebene. Wie schon oben angedeutet, möchte ich diese als eine a priori vorhandene Grundanschauung oder Vorstellung (einen Begriff a priori) aufgefaſst und im Unterricht demgemäſs dargestellt wissen.[1]) Es wird höchstens nötig sein den schlummernden Begriff wach zu rufen, ihn durch passende Beispiele und Fragen zum klaren Bewuſstsein, zur Evidenz zu bringen.[2]) Diese Ansicht scheint jetzt auch mehr und mehr durchgedrungen zu sein, da ja eine kurze Definition, die als wirklich genügend

---

[1]) Günther sagt in „Der Thibautsche Beweis für das elfte Axiom" p. 5 in einer Fuſsnote: „Neuerdings sind es besonders die Arbeiten J. C. Beckers, die den sekundären Charakter der früher als ursprünglich angesehenen Begriffe Gerade und Ebene bestimmt hervortreten lieſsen." Man vergleiche das Zitat aus Becker und meine Ausführungen in Kapitel V.

[2]) J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. H. Z. I. p. 236: „Ebene wird nicht definiert. Aus der Drehung der Ebene um eine gerade Linie ergiebt sich, daſs die Ebene bestimmt ist durch eine Gerade und einen Punkt, statt dessen man auch eine Parallele oder eine schneidende Gerade setzen kann. Setzt man statt der ursprünglichen Geraden zwei Punkte, so ergiebt sich, daſs die Ebene durch drei Punkte bestimmt ist. Daraus folgt, daſs kreuzende Gerade nicht in einer Ebene liegen können."

bezeichnet werden konnte, bisher nicht vorhanden war.[1]) Will man eine wissenschaftliche Definition der Ebene aufstellen, so dürfte die folgende die angemessenste sein:

Die Ebene ist diejenige Fläche, welche in ihrer Gesamtheit (in allen ihren Teilen) nur nach zwei Dimensionen überhaupt ausgedehnt ist[2]) (die überall nach denselben beiden Hauptrichtungen ausgedehnt ist).

Diese Definition dürfte, falls der Lehrer eine solche für nötig hält, auch für den Schüler verständlich sein, da sie der Anschauung völlig entspricht.

Die Schwäche auch dieser Definition liegt darin, daſs sie auf den Begriff der Dimension sich stützt. (Der Begriff der Richtung muſs allen geometrischen Untersuchungen zu Grunde liegen. Vergl. Kapitel V.)

Ist erst der Begriff des geometrischen Ortes den Schülern klar geworden — und vielleicht wäre es nicht ganz ohne Vorteil, diesen Begriff sozusagen an die Spitze zu stellen derjenigen Betrachtungen, die sich mit Fläche, Linie, Punkt als selbständigen Gebilden befassen, d. h. alle Flächen, Linien, (Punkte), insofern sie für sich[3]) betrachtet werden, als geometrische Örter zu definieren — so ergiebt sich bekanntlich die einfache Definition der Ebene:

„Die Ebene ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei Punkten gleich weit entfernt sind.“

Die Ebene würde bei dieser Betrachtung allerdings den Charakter als einfachste Fläche einbüſsen, an ihre Stelle würde die Kugelfläche treten als diejenige Fläche, deren sämtliche Punkte von einem Punkte gleich weit entfernt sind.[4])

---

[1]) Meiner Ansicht nach muſs die Ebene jedenfalls ohne Hülfe des Begriffes der geraden Linie definiert werden. Vergl. die Schluſsbemerkung des Kapitels.

[2]) Vergl. meine obigen Bemerkungen in Kapitel III und das Zitat aus Schmitz-Dumont.

[3]) Hierbei würde natürlich der umgekehrte Weg eingeschlagen werden müssen: das abstrakte Raumgebilde Punkt würde den Ausgangspunkt für alle Betrachtungen bilden müssen.

[4]) Man vergleiche hierzu das Zitat aus Frischauf und die dazu gehörende Anmerkung aus Günthers Rezension der Elemente von Frischauf.

Von den Arbeiten, die hier zitiert werden sollen, verdient wohl eine Abhandlung von Crelle an die Spitze gestellt zu werden. Crelle: Zur Theorie der Ebene. (Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 1. Mai 1834.)

„.... Gleichwohl ist darunter ein Gegenstand, der nicht minder unvollkommen, obschon gewifs nicht minder einflufsreich auf alles Übrige sein dürfte, als irgend ein anderer; ja! der selbst noch unvollkommener, obgleich ebensowichtig ist, als die Parallelen-Theorie. Dieser Gegenstand ist die Theorie der Ebene. Bei den Parallelen drückt sich Euklid wenigstens völlig bestimmt und klar aus, und die Schwierigkeit ist nur, dafs dort ein Satz ohne Beweis angenommen werden soll, der des Beweises fähig zu sein und zu bedürfen scheint. Bei der Ebene dagegen sind die Worte des grofsen Lehrers der Geometrie völlig unbestimmt, wenigstens dunkel."

Es wird alsdann die Euklidsche Definition angeführt und mit derjenigen von der Geraden verglichen. Crelle fügt hinzu:

„Die Worte 'auf einerlei Art liegt' geben aber offenbar keinen, wenn auch nur einigermafsen ausschliefsenden Begriff von irgend einer bestimmten geometrischen Gestalt, und lassen folglich die Vorstellung von der Ebene völlig in Ungewifsheit."

Die neuere[1]) Definition „eben sei eine Fläche, wenn die geraden Linien, welche je zwei beliebige in der Fläche liegende Punkte verbinden, ganz in der Fläche liegen," wird in geistvoller Weise zurückgewiesen, indem gezeigt wird, dafs bei dieser Erklärung das Sichschneiden der Geraden vorausgesetzt wird, „was nicht aus sich selbst folgt."

Indem nun Crelle auf „die Bemühungen um die Theorie der Ebene" eingeht, schickt er voraus, dafs er „die Uberzeugung habe, es sei und werde für immer völlig *unmöglich* bleiben, die Begründung der Elemente der Geometrie, ebenso wie auch diejenigen der Analysis, zur Vollkommenheit[2]) zu bringen."

---

[1]) Nach Crelle zuerst von Robert Simson aufgestellt.

[2]) Also bleibt ebenfalls nichts anderes übrig, wenn anders Mathematik als Wissenschaft bestehen bleiben soll, als die Ebene für eine a priori geg. Vorstellung hinzunehmen. „Aus verborgenen Tiefen heraus entwickeln sich die Elemente einer Vernunft-Wissenschaft, wie z. B. der

Crelle schliefst diesen Passus mit den Worten:

„Alle Vervollkommnung, die möglich ist, besteht nach meiner Meinung darin: Erklärungen und Grundsätze aufzustellen, die am meisten geeignet sein möchten, unmittelbar bestimmte Vorstellungen und Erkenntnisse zu erzeugen oder zu erregen."

Eine dritte Definition, der Crelle grofse Klarheit und Bestimmtheit nachrühmt, rührt nach ihm von Fourier her und lautet:

„Die Ebene wird von der Gesamtheit aller der geraden Linien gebildet[1]), die, durch einen und denselben Punkt einer geraden Linie im Raume gehend, auf dieser senkrecht stehen."

Abgesehen von dem erwähnten Umstande, dafs die[2]) Gerade zu Grunde gelegt ist, kommt hier in dieser Erklärung auch noch der Begriff der senkrechten Lage vor, der also als bekannt vorausgesetzt wird. Hieran liegt es wohl, dafs es Crelle „trotz aller Mühe" nicht gelungen ist, auf dieser Definition fortzubauen, denn in der That setzt der Begriff des Senkrechten den der Ebene voraus.[3]) Es kommt also in der Definition der Ebene ein Begriff vor, der erst aus dem Begriff der Ebene heraus erklärt werden kann, so dafs daraus die innere Unmöglichkeit der Definition folgt.

Dagegen würde die Fouriersche Erklärung sich zur Darstellung der Ebene als eines geometrischen Ortes eignen, wenn man sie in der folgenden Weise fafste:

„Die Ebene ist der geometrische Ort aller in einem Punkte auf einer Geraden senkrechten Geraden."

Crelle steht auf dem entgegengesetzten Standpunkte als dem oben von mir dargelegten, wenn er sagt: „Da die Theorie der geraden Linie zu derjenigen der Ebene unumgänglich er-

---

Mathematik, und in eine unendliche Höhe hinauf streben sie." „Was in der tieferen Tiefe und in der höheren Höhe liegt, bleibt für immer verborgen."

[1]) Besser, d. h. dem Wesen der Definition entsprechender: „die Ebene ist die Gesamtheit etc."

[2]) Vergl. weiter unten das Zitat aus der Crelleschen Abhandlung (p. 27).

[3]) Vergl. unten das Zitat aus Rausenberger.

forderlich ist" und legt dann seine Erklärung der geraden Linie, wie sie sich in seinem Lehrbuche (1826) findet, zu Grunde.

Der Übelstand, dafs er dabei von Grundvorstellungen ausgeht, für die eine Erklärung gesucht wird, kommt zum Ausdruck in seinen Worten:

„Ein beschwerlicher, fast entmutigender Umstand macht sich hierbei freilich bemerklich. Da nämlich hier von Dingen ausgegangen werden mufs, von welchen sich nichts mehr beweisen läfst, so kann Jedermann gleich die ersten Anfänge durch die blofsen Worte: es gefalle ihm nicht, und dann mit den Anfängen alles Übrige über den Haufen werfen. Allein wie es scheint, läfst sich verlangen, dafs man wenigstens die fernere Entwicklung gestatte, und erst hernach, nicht von vornherein urteile, ob das Ganze, mit seinen Anfängen, einige Berücksichtigung verdiene oder nicht.[1])

Rücksichtlich der Demonstrations-Methode bemerkt Crelle: „Anstatt zu zeigen, wie eine Figur gerade durch Zirkel und Lineal gezeichnet werden könne, wird da, wo die Existenz der Figur zweifelhaft sein könnte, bewiesen werden, dafs sie möglich ist."

Die eigentliche Behandlung der Theorie der Ebene hat folgenden Gang:

§ I.

1) „Wenn, während zwei Punkte einer Linie fest sind, alle ihre übrigen Punkte an demselben Orte im Raume bleiben, wie auch die Linie im Raume durch die beiden Punkte gelegt werden mag, so heifst sie gerade."[2])

---

[1]) Diese Ansicht stimmt ja wohl damit überein, was Kummer gesagt hat: „In der Mechanik (als rein mathematische Wissenschaft nahe verwandt mit der Euklidschen Geometrie) werden Grundsätze aufgestellt, die nicht bewiesen werden können und nicht bewiesen zu werden brauchen, da sie mit der äufseren Natur nicht im Widerspruch stehen. Der Geist der Mathematik besteht eben darin, zu beweisen, dafs, wenn das Eine so ist, so mufs unumstöfslich das Andere so sein; nicht aber zu zeigen, dafs das Erste wirklich so ist, wie wir annehmen. Wir haben es dabei nur mit abstrakten Dingen zu thun. Auch die gerade Linie ist eine Abstraktion."

[2]) Vergl. weiter unten den Abschnitt „gerade Linie".

2) „Es giebt nur eine gerade Linie durch zwei feste Punkte im Raume.“[1])

Die folgenden Sätze, auch der 3. und 4., die sich anschliefsen, bauen das Gegebene weiter aus; es wird auf Mafsbeziehungen[2]) eingegangen und die Ausführungen schliefsen mit der Erklärung: „Die Gerade dient zum Mafs der Entfernung zweier Punkte.“[3])

§ II.

Die Existenz gleicher Hälften (!) einer geraden Linie (Strecke) wird bewiesen auf einem andern Wege als dem Konstruktionswege Euklids.

§ III.

Dieser § geht von der folgenden Definition des Winkels[4]) aus: „Die Neigung zweier geraden Linien im Raume, die sich treffen, ohne ineinander zu fallen, heifst, am Durchschnittspunkte, Winkel.“

Daran schliefsen sich Erklärungen von Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln, denen, meiner Ansicht nach, der Begriff der Ebene unbewufst zu Grunde liegt. — Auch die Mafsbeziehungen der Winkel werden durchgeführt. Hieran schliefst sich der Lehrsatz: „Eine gerade Linie, die zwei Punkte in den Schenkeln des Winkels verbindet, kann nicht durch den Scheitel des Winkels gehen.

§ IV.

Beweis der Gleichheit von Scheitelwinkeln mittels der Kongruenz (abweichend von Euklid).

§ V.

Lehrsätze über Dreiecke, die „ohne den Begriff der Ebene stattfinden.“[5])

---

[1]) Besser wohl: Alle geraden Linien durch zwei feste Punkte im Raume decken sich vollständig; dann wäre Lehrsatz 3 überflüfsig, ebenso Lehrsatz 4, der auch nur als Zusatz zu 3 betrachtet werden kann.

[2]) Dafs hierbei fortwährend Linie statt Strecke gesetzt wird, sei besonders hervorgehoben.

[3]) Vergleiche Kapitel V „über die Gerade“ und über „Abstand“.

[4]) Vergl. unten „Winkel“.

[5]) Vergl. § III.

Aufser dem Lehrsatz (!), „dafs gleiche Dreiecke gleiche Seiten und gleiche Winkel haben," wird der 1. Kongruenzsatz (2 Seiten und eingeschlossener Winkel) und der Satz von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreieck behandelt. Der zweite Beweis zu dem letzteren Satze ist bemerkenswert. Er findet sich nur in einigen wenigen Lehrbüchern, der erste Beweis als der einzig naturgemäfse dürfte wohl allmählich alle anderen verdrängen. Beide Beweise weichen von dem Euklidischen, der leider fast noch in allen Lehrbüchern gefunden wird, ab.

§ VI.

„Nunmehr wird die Definition der Ebene folgen müssen. Es wird aber derselben ein Satz vorangehen, welcher beweist, dafs die Fläche, welche Ebene genannt werden soll, möglich ist." Dieser Satz lautet:

(21.) Lehrsatz: „Durch jede gerade Linie und durch einen beliebigen Punkt im Raume, aufserhalb derselben, ist immer eine Fläche möglich, in welcher ohne Ausnahme alle die geraden Linien in ihrer ganzen Ausdehnung liegen, die durch den Punkt und durch die gerade Linie gehen."

Diese Fläche soll Ebene heifsen, der Punkt bestimmender Punkt, die gerade Linie bestimmende Gerade, die anderen Geraden erzeugende Geraden. Crelle fährt fort:

„Diese Definition der Ebene gewährt den wesentlichen Vorteil, dafs durch sie überall, wo drei einander in einem und demselben Punkte schneidende gerade Linien zugleich durch eine und dieselbe vierte gerade Linien gehen, sogleich bestimmt ist, dafs diese Linien in einer und derselben Ebene liegen."

Es schliefsen sich folgende Lehrsätze an:

„Durch eine gerade Linie im Raume und durch einen Punkt aufserhalb desselben kann nur eine Ebene gehen."

„Durch zwei gerade Linien, die sich schneiden, kann immer wenigstens eine Ebene liegen."

§ VII.

Dieser § handelt von der Summation von Winkeln und baut sich auf einen Grundsatz auf, von dem es heifst, dafs „Euklid ihn ebenfalls stillschweigend annehme."

§ VIII.

„Es folgen nun wieder einige Sätze, die zur ferneren Entwicklung notwendig sind. Die Beweise derselben sind den Euklidischen nachgebildet, mufsten aber teils vervollständigt, teils auf das hier Vorhergehende bezogen werden.“

(27.) Lehrsatz: „In jedem Dreieck ist jeder Winkel kleiner, als der Nebenwinkel des an der nämlichen Seite liegenden anderen Winkels.“

(28.) Lehrsatz: „In jedem Dreieck liegt der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüber“ und (29.) Umkehrung.

(30.): „In jedem Dreieck sind zwei Seiten zusammen länger, als die dritte.“

(31.): „II. Kongruenzsatz (1 Seite und 2 Winkel).“

(32.): „III. Kongruenzsatz (3 Seiten).“

Beim Beweis dieses Satzes werden die fünf möglichen Fälle (aufser 2 Winkel gl.) einzeln zurückgewiesen.

§ IX.

„Geometrischer Ort“ wird erklärt und das Beispiel der Kugel gegeben. Dann folgen zwei Grundsätze — deren erster lautet: „Eine gerade Linie durch irgend einen Punkt innerhalb einer Fläche, die einen Raum ganz umschliefst, schneidet, genugsam verlängert, die Fläche notwendig“ — einige Lehrsätze — z. B. „es giebt immer eine gerade Linie, die mit einer gegebenen Geraden gleiche Nebenwinkel macht“ — und schliefslich eine Erklärung: „Gleiche Nebenwinkel sollen rechte und gerade Linien im Raume, die sich unter gleichen Nebenwinkeln schneiden, auf einander senkrecht oder Perpendikel zu einander heifsen.“

§ X.

Nunmehr können die Eigenschaften der Ebene untersucht werden. Es geschieht dies in den folgenden Sätzen, die diese Eigenschaften aussprechen:

(40.) Lehrsatz: „Wenn auf einer geraden Linie im Raume zwei andere gerade Linien in einem und demselben Punkte senkrecht stehen, so dafs also die Nebenwinkel rechte Winkel

sind: so stehen alle erzeugenden Linien jeder beliebigen durch die beiden Geraden gehenden Ebene ebenfalls auf der ersten senkrecht."

(41.) Lehrsatz: „Wenn zwei sich schneidende gerade Linien aufeinander senkrecht stehen, so giebt es im Raume immer eine durch ihren Durchschnittspunkt gehende gerade Linie, die auf den beiden sich schneidenden geraden Linien zugleich senkrecht steht."

(42.) Lehrsatz: „Dasselbe unter der Voraussetzung, dafs die beiden Geraden sich unter beliebigem Winkel schneiden."

Unter 43 findet sich folgende Erklärung:

„Der geometrische Ort aller Perpendikel durch einen festen Punkt einer festen geraden Linie, auf dieselbe, soll Perpendikular-Fläche heifsen; die feste Linie Axe, die Perpendikel Strahlen, der feste Punkt Mittelpunkt." (Eine solche Perpendikular-Fläche ist also das, was Fourier Ebene nennt.)

(44.) Lehrsatz: „Durch keinen Punkt einer geraden Linie giebt es andere Perpendikel auf dieselbe, als diejenigen, welche in der Perpendikular-Fläche durch den bestimmten Punkt liegen."

Aus 44 folgen die Lehrsätze 45 und 46 direkt, eigentlich als Zusätze; 47 aus 42. — Wichtig ist

(48.) Lehrsatz: „Es kann durch zwei sich schneidende gerade Linien nur eine Perpendikular-Fläche gelegt werden, deren Axe durch den Durchschnittspunkt der beiden Linien geht."

(49.) Lehrsatz: „Jede gerade Linie, die durch zwei beliebige Punkte einer Ebene geht, liegt ganz in dieser Ebene."

(„Dieses ist der in der Vorbemerkung gedachte Satz, der gewöhnlich, ohne Beweis, als Definition der Ebene aufgestellt wird.")

50 folgt direkt aus 48 (ist eigentlich nur eine andere Form der Aussage), 51 konstatiert diese Übereinstimmung von 48 und 50.

Die folgenden Ausführungen beschäftigen sich mit der Identifizierung von Perpendikular-Fläche und Ebene und dem Kongruenzproblem, insofern als z. B. folgende Lehrsätze bewiesen werden:

(58.) Lehrsatz: „Jedes Dreieck kann in eine bestimmte Ebene und an eine bestimmte Linie in derselben gelegt werden."

(59.) Lehrsatz: „Durch jedes Dreieck kann eine Ebene gelegt werden, in welche die drei Seiten desselben in ihrer ganzen Ausdehnung fallen, aber nur eine."

(60.) Lehrsatz: „Wenn zwei Ebenen drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, miteinander gemein haben, so fallen sie ganz ineinander" — und noch mehrere andere.

§ XI.

Diese angegebenen Sätze werden als die notwendigsten aus der Theorie der Ebene bezeichnet, wie sie sich aus den Grundsätzen ergeben:

1)[1]) „Wenn drei gerade Linien, die in einem und demselben Punkte sich treffen, in einer und derselben Ebene liegen, so ist der Winkel zwischen den beiden äufseren Linien so grofs, als die Winkel zwischen den beiden äufseren und der inneren Linie zusammengenommen."

2)[2]) „Eine gerade Linie durch irgend einen Punkt innerhalb einer Fläche, die einen Raum ganz umschliefst, schneidet, genugsam verlängert, die Fläche notwendig."

3)[3]) „Wenn irgend ein Punkt eine Fläche, die einen Raum ganz umschliefst, oder auch irgend ein Punkt einer geraden Linie, innerhalb einer anderen Fläche liegt, die einen Raum ganz umschliefst; zugleich aber irgend ein anderer Punkt der ersten Fläche, oder der Linie, aufserhalb der zweiten Fläche liegt: so schneiden die erste Fläche, oder die Linie, die zweite Fläche notwendig."

Dann geht § XI. noch auf die Theorie der Parallelen ein. Was davon erwähnenswert ist, wird zitiert werden in dem Abschnitt, der diesem Problem gewidmet ist.

§ XII.

fafst die Resultate des § XI. noch einmal zusammen

---

[1]) Vergl. § VII.
[2]) Vergl. § IX.
[3]) Vergl. § IX.

Man wird es mir hoffentlich nicht verdenken, dafs ich diese Abhandlung im Auszuge, aber doch so vollständig mitgeteilt habe. Aber, soweit mir bekannt, ist sie die ausführlichste Bearbeitung der Theorie der Ebene, dann aber möchte auch das Crellesche Journal, dem sie entnommen, gerade den Lesern des vorliegenden Werkes nicht überall zu Gebote stehen. Wessen Interesse durch das Angeführte hinreichend gereizt wird, den mufs ich auf die 41 Quartseiten umfassende Arbeit selbst verweisen.

Von den Lehrbüchern kommen nur wenige in Betracht; die meisten geben entweder die Euklidsche Erklärung selbst oder eine derselben nachgebildete; fast überall also stützt sich die Erklärung auf diejenige der geraden Linie. Unsere Ansicht hierüber ist oben ausführlich gegeben.

Die gebräuchlichsten Erklärungen sind:

1) Gleitet eine Gerade, die durch einen festen Punkt geht, auf einer Geraden, so heifst die erzeugte Fläche eine Ebene.

2) Eine Fläche heifst eine Ebene, wenn jede Gerade, die zwei Punkte mit ihr gemein hat, ganz in ihr liegt.

3) Eine Fläche heifst eine Ebene, wenn man von jedem Punkt nach allen (!) Richtungen Gerade ziehen kann, die ganz in ihr liegen.

4) Eine Fläche ist durch eine Gerade und einen Punkt oder durch 3 Punkte bestimmt — und so ähnlich.

Oft wird auch die Ebene als die einfachste Fläche bezeichnet und dann irgend ein bestimmendes Axiom hinzugefügt.

Der Begriff der Einfachheit kann dabei von mehreren Gesichtspunkten aus beleuchtet werden. Entweder man versteht unter dieser Bezeichnung, dafs die Ebene diejenige Fläche sei, welche am einfachsten vorzustellen sei, dem menschlichen Denken am zugänglichsten, dann wäre der Ausdruck identisch mit die leichteste Fläche, die verständlichste Fläche, vielleicht auch die natürlichste Fläche, oder er bezöge sich auf die Erzeugung der Fläche (in dieser Hinsicht würde die Betrachtung mit der ersten im wesentlichen übereinstimmen), oder er bezöge sich darauf, dafs es nur e i n e — sit venia verbo — A r t von Ebenen gäbe, also „Einfachheit“ in dem Sinne von

Singularität oder Unikum. Dieser letztere Standpunkt ist jedenfalls der bei weitem wichtigste; das Charakteristische für die Ebene ist gerade, daſs wir es mit der Ebene, nicht mit Ebenen zu thun haben. In diesem Sinne darf man dann die Ebene aber nicht als einfachste Fläche bezeichnen, sondern als die einfache Fläche κατ' ἐξοχήν (mit anderen Worten ist damit die unbedingte Kongruenz der Ebene ausgesprochen). Damit wäre dann aber auch wieder eine Anknüpfung an die erste Auffassung gewonnen, die uns die Ebene als Begriff a priori giebt. Es lieſse sich philosophisch wohl rechtfertigen, die Einfachheit in diesem Sinne als Merkmal eines Begriffes a priori überhaupt aufzustellen, womit man dann über die Schwierigkeit der Definitionen von Raum, Ebene, Gerade, Punkt hinweg wäre. Am wenigsten paſst der Begriff der Einfachheit bei der zweiten Betrachtung, nämlich in Hinsicht auf ihre Erzeugung, hier würde mit Recht wohl die Kugel als die einfachere Fläche bezeichnet werden.

Baltzer, Elemente. II. § 4 — geht von der Regelfläche aus, die folgendermaſsen definiert wird:

„Eine Fläche heiſst geradlinig (Regelfläche), wenn durch jeden Punkt derselben eine Gerade sich ziehen läſst, die auf der Fläche liegt.[1]) Die Bahn einer irgendwie bewegten Geraden ist eine geradlinige Fläche. Die einfachste unter den geradlinigen Flächen ist die Ebene (ἐπί-πεδος, planum), auf der die Geraden liegen, die durch einen geg. Punkt gehen und mit einer geg. Geraden einen Punkt gemein haben. Wenn eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, so liegt sie auf der Ebene (Axiom von der Ebene)."

In einer Anmerkung giebt Baltzer u. a. noch folgende Angaben. Leibniz[2]) habe, etwas deutlicher als Euklid, die Ebene und Gerade dadurch erklärt, daſs jene den unbegrenzten Raum, diese die unbegrenzte Ebene in zwei kongruente Teile zerschneidet (Brief an Giordano, ed. Gerhardt. I. p. 196).

---

[1]) Diese Benennung rührt von Monge her. Vergl. Hachette géom. déscr. 1822. préf. 13.

[2]) Man vergleiche weiter unten das Zitat aus Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie.

Bemerkenswerte Versuche, jenes Axiom zum Theorem zu erheben, seien in neuerer Zeit gemacht.

Deahna (Demonstr. theorematis, esse superficiem planam. Marb. 1837) konstruiert die Ebene durch Rotation eines Winkels um einen seiner Schenkel mit der Bedingung, dafs eine konzentrische Kugelschale in zwei kongruente Teile zerschnitten werde.[1])

Gaufs ist der Meinung gewesen, dafs Deahnas Darstellung von einigen Mängeln, die in ihr anzutreffen sind, sich befreien lasse; in seinem Nachlafs befindet sich ein diesen Gegenstand betreffender Aufsatz.

Crelles Aufsatz (Journal 45 p. 15) wird erwähnt, ebenso Gerlings (Crelles Journal 20 p. 332) und Erbs (Die Probleme der Geraden u. s. w. Heidelberg 1846) Versuche, das Axiom der Ebene zu beseitigen.

Da zunächst nur Kreis und Kugel so definierbar sind, dafs deren Möglichkeit einem Zweifel nicht unterliegt, so sind auch Versuche angestellt, diese als geometrische Örter der Betrachtung zu grunde zu legen.[2]) Durch zwei kongruente

---

[1]) Man könnte einwenden, dafs es dann noch einfacher sein würde, die Erzeugung der Ebene durch Rotation eines rechten Winkels um einen seiner Schenkel als Axe anzunehmen. Der andere Schenkel beschreibt dann eine Ebene. Jedoch würde bei dieser Annahme die Ebene stillschweigend vorausgesetzt sein. An und für sich liegt kein Grund vor, den Winkel selbst als einen ebenen zu betrachten, d. h. die Drehung des einen Schenkels zum andern in einer Ebene anzunehmen; spricht man jedoch von einem rechten (oder überhaupt von einem bestimmten) Winkel, so ist der Begriff der Ebene supponiert. — Man vergl. Schotten, Zur Definition des Winkels in H. Z. XX, 481 (und später den Artikel Winkel in diesem Werke II. Band). — Worpitzky giebt übrigens in seinen Elementen die Definition der Ebene unter Zuhülfenahme des rechten Winkels in der angedeuteten Weise.

[2]) Geht man von dem Begriffe des „geometrischen Ortes“ aus, so ist die Kugel das einfachste Gebilde im Raume, der Kreis das einfachste Gebilde in der Ebene.

I. Im Raum.

1) Die Kugel ist der geometrische Ort für alle Punkte im Raume, die von einem geg. Punkt gleich weit abstehen.

2) Die Ebene ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei geg. Punkten gleichweit abstehen.

Scharen von konzentrischen Kugeln entsteht die Ebene als das Gemeinschaftliche von je zwei gleichen Kugeln (Lobatschewsky und Bolyai).[1])

J. K. Becker,[2]) Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. — Berlin 1877.

„Die Kegelfläche, welche der eine Schenkel eines rechten Winkels beschreibt, wenn derselbe um den andern als Axe gedreht wird, zeichnet sich vor den übrigen Kegelflächen durch besondere Eigenschaften aus, und hat deshalb den besonderen Namen ebene Fläche oder Ebene erhalten.[3])

Als besonderes Merkmal wird angeführt, dafs diese Kegelfläche mit ihrer Scheitelkegelfläche zusammenfällt, was bei keiner andern Kegelfläche eintreten kann.

„Diese beiden zusammenfallenden Kegelflächen decken sich aber so, dafs die innere Seite der einen die äufsere der anderen ist. Sie sind jedoch auch als Kegelflächen, die von gleichen Winkeln beschrieben werden, kongruent, und können mithin auch so zur Deckung gebracht werden, dafs die Axen zusammenfallen, und damit auch die inneren und äufseren Seiten der Flächen. Eine Ebene kann also dieselbe Stelle auf zwei Arten

---

3) Die Gerade ist der geometrische Ort aller Punkte, die von drei geg. Punkten gleichweit abstehen.

II. In der Ebene.

1) Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem geg. Punkte gleichweit abstehen.

2) Die Gerade ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei geg. Punkten gleichweit abstehen.

[1]) Vergleiche das Zitat aus Frischauf.

[2]) Es ist eine geradezu auffallende Erscheinung, dafs in den Rezensionen über die Darstellung der Grundbegriffe fast durchweg kein Urteil abgegeben wird, sondern höchstens das Vorhandensein einer einleitenden Betrachtung der Grundbegriffe konstatiert wird. Selbst bei der Besprechung des vorliegenden Werkes geht Killing über das I. Kapitel kurz hinweg mit der Bemerkung, dafs sich Beckers Ansicht in kürzerer Form in Schlömilchs Zeitschrift Band XX, Seite 445 finde und durch Günther in H. Z. VII. p. 407 bekannt geworden sei.

[3]) Man vergleiche meine Bemerkungen zu Deahnas Konstruktion der Ebene in Baltzers Zitat.

einnehmen, so dafs ein mit ihr fest verbundener aber nicht in ihr liegender Punkt sowohl auf der einen Seite, wie auch auf der andren Seite liegen kann."

„Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleichen Abstand haben, ist eine Ebene, deren Axe durch die beiden Punkte geht."

„Jede Gerade, welche zwei Punkte der Ebene verbindet, liegt ganz in derselben."

„Zwei Ebenen, welche drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte gemein haben, fallen in allen Punkten zusammen."

„Je drei nicht in gerader Linie liegende Punkte bestimmen eine Ebene."

„Aus der Definition der Ebene folgt, dafs sie von endloser Ausdehnung ist und mithin den Raum in zwei durch sie völlig getrennte Teile teilt. Ebenso wird sie selbst von einer in ihr liegenden Geraden in zwei Teile geteilt, welche Halbebenen heifsen."

Es wird dann noch gesagt, dafs auch durch eine Gerade und einen Punkt aufserhalb, sowie durch zwei sich schneidende Gerade eine Ebene bestimmt ist; ferner heifst es: „Alle Ebenen und Halbebenen sind kongruent." Daran knüpfen sich dann eine Reihe von stereometrischen Sätzen. Von besonderem Werte ist es, dafs gleich hier bei den Grunddefinitionen der Begriff der Symmetrie verwendet wird. Einige der zugehörigen Sätze lauten:

„Jedem Punkte aufserhalb einer Ebene entspricht immer ein und nur ein Punkt, welcher von jedem Punkte der Ebene denselben Abstand hat wie der gegebene.

Dieser Punkt heifst der symmetrische Gegenpunkt der gegebenen in Bez. auf die Ebene.

Zwei Punkte heifsen also symmetrische Gegenpunkte in Bez. auf eine Ebene, wenn diese der Ort aller von jenen gleich weit abstehender Punkte ist.

Die Ebene heifst die Symmetrieebene der beiden Punkte."

Dronke, Elemente der ebenen Geometrie. — M.-Gladbach 1864.

„Diejenige Fläche, welche durch drei in ihr befindliche Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, vollständig bestimmt wird, heifst ebene Fläche oder Ebene.“ Dazu die Anmerkung: „Es können also zwei Ebenen sich nur in einer Linie schneiden, die schon durch zwei Punkte bestimmt ist, d. h. in einer Geraden.[1]) Da der Schnitt der Ebenen in jeder Richtung stattfinden kann, so lassen sich also in jeder Ebene nach allen Richtungen Gerade ziehen, die ganz in derselben liegen.“

Ebensperger, Leitfaden der Geometrie. — Nürnberg 1850.

„Eine Fläche heifst eben oder eine Ebene, wenn alle Teile in derselben Richtung nebeneinander liegen[2]) und man also nach allen Seiten hin gerade Linien in sie hinein gelegt denken kann, welche ganz mit ihr zusammenfallen.“

Erdmann, Die Axiome der Geometrie. — Leipzig 1877.

„Was zunächst die einfachste dieser Gruppen, die Ebene und die auf dieselbe abwickelbaren Flächen betrifft, so zeigt sich durch die analytische Diskussion, was die anschauliche Beschaffenheit der Grundfläche von vornherein erwarten läfst, dafs ihr Krümmungsmafs den konstanten Wert Null annimmt.“[3])

---

[1]) Diese Bemerkung ist sehr scharfsinnig und giebt uns auf natürlichste Weise die Schnittlinie zweier Ebenen.

[2]) Dieser Ausdruck ist nicht ganz klar. Das folgende „Seiten“ ist hier doch identisch mit Richtungen. Danach würde die Erklärung lauten: „Eine Fläche heifst eben, wenn alle Teile in derselben Richtung nebeneinander liegen und man also nach allen Richtungen hin gerade Linien in sie hinein gelegt denken kann. Der gebrauchte Ausdruck „nach derselben Richtung nebeneinander“ soll das ersetzen, was bei den Linien der Ausdruck Richtung schlechtweg bedeutet; für die Flächen fehlt ein derartiger Ausdruck, er ist mit dem Begriff Ebene identisch.

[3]) Vielleicht wäre es passend, an dieser Stelle auf den Unterschied von Krümmung und Beugung, von Biegen ohne und mit Dehnung näher einzugehen; doch sollen diese Betrachtungen an späterer Stelle ausführlich behandelt werden und es möge daher genügen, hier nur auf diesen Unterschied hingewiesen zu haben.

„Eine Folge der Konstanz des Krümmungsmafses ist, dafs alle diese Flächen in sich selbst kongruent sind, d. h. dafs jeder ihrer Teile abgesehen von der Begrenzung in jeden andern sich verschieben läfst."[1])

Euklid, Elemente. ed. Dippe. — Halle 1840.

„Eine ebene Fläche (Ebene) ist diejenige, welche zwischen allen in ihr befindlichen geraden Linien auf einerlei Art liegt."[2])

Fabian, Lehrbuch der Mathematik.[3]) I. — Lemberg 1876.

Fabian geht von der Erzeugung der Ebene durch eine Gerade aus, die durch einen festen Punkt geht und auf einer geg. Geraden hingleitet. Es heifst dann:

„Die beide Raumteile trennende Fläche darf auf keiner Seite Vertiefungen oder Erhabenheiten haben. Jede Vertiefung der einen Seite würde sich als Erhabenheit auf der andern kundgeben; die betrachtete Fläche mufs aber auf der einen Seite eben[4]) so ausschauen, wie auf der anderen.

Diese Fläche heifst Ebene.

Eine Ebene ist also eine Fläche, welche zwei gleich begrenzte Teile des Raumes voneinander trennt."

Kruse, Elemente der Geometrie. I. — Berlin 1875.

„Eine Fläche, welche ihre Lage nicht ändert, während sie sich so bewegt, dafs sie stets drei Gerade enthält, welche durch drei feste nicht auf einer Geraden liegende

---

[1]) Gültigkeit der Axiome von der Geraden als der kürzesten Verbindungslinie zweier Punkte und von dem Parallelismus.

[2]) Zu vergleichen: J. Kober, Über die Definitionen geometrischer Grundbegriffe. — H. Z. I. p. 228—236. — Friedlein, Untersuchungen der sog. Definitionen Heros, in H. Z. II. p. 183.

[3]) Man vergleiche H. Z. VII. p. 298.

[4]) Da dieses Wort grofs gedruckt ist, so wird offenbar auf die Gleichartigkeit der Benennung Wert gelegt. Ob es sich für den Verfasser um ein geistreiches (!) Wortspiel handelt oder ob es ihm Ernst ist mit dieser Herleitung, wage ich nicht zu entscheiden. — Vergl. p. 281; Anm. 2.

Punkte gehen, wird eine ebene Fläche (kurzweg Ebene) genannt."[1])

Kunze, Lehrbuch der Geometrie. I. — Jena 1851.

„Eine Fläche heifst eben (gerade) oder eine Ebene, wenn sie überall nach geraden Linien ausgedehnt ist."

„Anmerkung 1. Die ebene Fläche ist ihrer Art nach nur eine . . . ."

„Anmerkung 2. Euklides sagt: Eine ebene Fläche ist diejenige, die (zwischen) den in ihr befindlichen geraden Linien gleichförmig liegt; — dieselbe Dunkelheit wie bei der geraden Linie. Übrigens nimmt Euklides bei seinen Konstruktionen stillschweigend an, dafs sich in der Ebene allenthalben gerade Linien ziehen lassen."[2])

„Anmerkung 3. Man hat wiederholt versucht, die Möglichkeit der Ebene durch Konstruktion zu beweisen. Das scheint mir aber eine falsche Anforderung an die Geometrie zu sein.[3]) Der Geometer setzt mit Euklides die Möglichkeit der Ebene voraus und konstruiert nur, wenn ihm die Ebene gegeben ist."

Milinowski, Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. I. — Leipzig 1881 — bezeichnet kurz „Punkt, Gerade, Ebene als die Grundgebilde der Geometrie." — Damit stellt er sich auf den Standpunkt, dafs Punkt, Gerade, Ebene ohne Erklärung direkt dem Vorstellungsvermögen entnommen, a priori in demselben enthalten sind.[4])

---

[1]) Diese Erklärung trifft zwar für die Ebene zu, aber nicht nur für die Ebene, sondern beispielsweise auch für die Kegelflächen und die Cylinderflächen. Davon aber abgesehen müfste sie doch als für die Schule ganz unbrauchbar bezeichnet werden, da gewifs kein Schüler aus dieser Erklärung eine anschauliche Vorstellung der Ebene bekommen würde. — In der Besprechung des vorliegenden Buches in H. Z. VII. p. 212—222 sagt Scherling: „Noch weniger können wir uns mit der vom Verfasser gegebenen Definition der Ebene befreunden."

[2]) Setzt damit also den Begriff der Ebene voraus.

[3]) Man vergleiche die Äufserung Kummers.

[4]) Insofern wir sie als Grenzen betrachten. Werden sie an und für sich der Untersuchung unterworfen, so müssen wir sie in diesem Sinne als Begriffe a priori unseres Denkens bezeichnen.

Müller, E., Elemente der Geometrie. I. — Braunschweig 1869.

„Eine Fläche heifst ebene Fläche oder Ebene schlechtweg, wenn sie auf beiden Seiten in ihrer ganzen Ausdehnung nach allen vier Gegenden dergestalt von einerlei Beschaffenheit ist, dafs die beiden Seiten mit den zugehörigen Raumteilen oder ohne dieselben miteinander vertauscht werden können. Da aber eine Fläche als gemeinschaftliche Grenze zwischen den Räumen auf beiden Seiten als zweifache erscheint, so werden zwei Ebenen und die auf beiden Seiten derselben befindlichen Räume mit jeder Seite und nach jeder Raumgegend hin dergestalt aufeinander gelegt werden können, dafs sie wieder nur eine Ebene und einen Raum bilden. Jeder der beiden Raumteile zu beiden Seiten einer Ebene ist dem andern gleich, also die Hälfte des ganzen Raumes oder ein Halbraum.“[1])

p. 16. „Eine jede der Ebenen eines Büschelraumes ist durch zwei ihrer Strahlen vollständig bestimmt, weil durch zwei dieser Stellen nur eine einzige Ebene möglich ist.“

II. p. 3 findet sich dieselbe Definition der Ebene.

Müller, J., Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Bremen 1870 — fügt der genetischen Definition der Ebene hinzu:

„Die Ebene ist die einzige Fläche, welche an jeder Stelle von beiden Seiten dieselbe Gestalt darbietet.[2])

Pfleiderer, Scholien. — Stuttgart 1827.

---

[1]) Welche Definitionen der Ebene die einzelnen Geometer auch gegeben haben, jede ohne Ausnahme kommt auf diese Eigenschaft zurück und kann ohne sie die geometrischen Fundamentalsätze der Kongruenz teils nur mangelhaft beweisen, teils gar nicht. Alles Klappen und Drehen der Ebene und ihrer Gebilde setzt diese Definition voraus.

[2]) Nach meiner Auffassung vom Element würde diese Erklärung auch für jedes Ebenenelement zutreffen (dagegen nicht nach Helmholtzs Erklärung). Ob aber überhaupt dem Begriffe Gestalt oder Form einer Fläche nicht schon der Begriff der Ebene zu Grunde liegt, erscheint mir zum wenigsten sehr zweifelhaft.

p. 8. „Eine Fläche heifst alsdann (d. h. nach der Definition der geraden Linie) eben, wenn jede gerade Linie, die von irgend einem Punkt der Fläche an irgend einen andern Punkt derselben gezogen wird, ganz in der Fläche liegt. Diese Definition drückt die gemeine Art, die Ebenheit einer Fläche durch Anlegung der Schärfe eines Lineals an dieselbe zu prüfen, durch allgemeine geometrische Ausdrücke aus."

Rausenberger, Die Elementargeometrie etc. — Leipzig 1887.

„Auch unter den Flächen wollen wir eine besonders einfache[1]) auswählen: die Ebene." Er giebt dann die gewöhnliche genetische Definition und fährt fort:

„Diese Erzeugungsweise liefert nicht die Grundeigenschaften der Ebene; vielmehr müssen wir wieder zu der direkten Anschauung[2]) rekurrieren . . . ."

„Die Fundamentaleigenschaften der Ebene sind die folgenden:

1) Jede Gerade, die mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, fällt ganz in dieselbe.

2) Jede in der Ebene gelegene Gerade kann durch Drehung um einen ihrer Punkte, wie der Augenschein zeigt, die ganze Ebene beschreiben.

3) Durch drei geg. Punkte, die nicht in dieselbe Gerade fallen, läfst sich nur eine (aber auch immer eine) Ebene legen.

4) Eine Gerade, die nur einen Punkt mit der Ebene gemein hat, durchdringt dieselbe. (Ebenenschnitt.)

---

[1]) Das Einfache hier in Bezug auf die Erzeugung der Ebene genommen.

[2]) So sehr auch ich für die Betonung und gröfsere Verwendung der Anschauung im Unterricht — im Vergleich zur jetzigen Methode — bin, so kann ich doch mich im Folgenden mit Rausenberger nicht völlig einverstanden erklären. Zumal auf den Augenschein — meine ich — dürfe man sich in der Geometrie nie berufen, sondern die Gewifsheit, die aus der Anschauung resultiert, resultiert aus der inneren Anschauung, d. h. dem von allen Zufälligkeiten resp. subjektiven Bedingungen, die dem Augenschein anhaften können, durch das Denken befreiten Anschauen.

5) Alle Ebenen sind, bis auf ihre Lagen, vollkommen identisch.

6) Die Ebene ist in sich verschiebbar und umkehrbar."

Rausenberger geht dann noch näher auf die schon erwähnte (s. Baltzer) Darstellung der Ebene von J. Bolyai und Lobatschewsky ein und fügt derselben folgende Kritik zu: „Diese Erzeugungsweise erscheint schon deshalb als unnatürlich, weil sie zuerst die Kugel und den Kreis liefert, die Gebilde einer höheren Stufe[1]) sind, wie die Ebene und die Gerade. Trotzdem müfsten wir sie der hier gegebenen vorziehen, wenn sich aus ihr die Eigenschaften der beiden letzteren ohne Zuhilfenahme von Axiomen (aufser dem der Kongruenz) herleiten liefsen." Dies ist nach Rausenbergers Ansicht aber nicht gelungen.[2]) Bemerkenswert ist noch folgende Stelle:

„Es scheint, dafs der zweite Gleichheitssatz nur nach Einführung der Ebene beweisbar ist; nur in der Ebene sind Winkelvergleichungen möglich."[3])

Schindler, Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

„Eine Fläche ist eine zweifach ausgedehnte Gröfse. Die einfachste Fläche ist daher diejenige, deren Länge und Breite gerade Linien sind. Da die Ausdehnung in die Breite von der Länge ausgeht,[4]) so haben diese beiden Geraden einen Punkt gemeinsam.

Sich schneidend heifsen Gerade, die einen Punkt gemein haben.

---

[1]) Vergl. die obigen Ausführungen. Im Anschlufs daran möge noch folgendes bemerkt werden. Wird der Begriff des geometrischen Ortes zu grunde gelegt, und resultieren wegen der Einfachheit der Bedingung als Grundgebilde Kugel und Kreis, so können Ebene und Gerade auch als Spezialfälle angesehen werden, nämlich für $r = \infty$.

[2]) Vergleiche das Zitat aus Frischauf, Absolute Geometrie.

[3]) Vergleiche meine Bemerkungen zu § III. der Crelleschen Abhandlung und die Bemerkungen, die sich auf diese Frage beziehen, bei den Zitaten von Baltzer und J. C. Becker.

[4]) Eine höchst eigentümliche Ausdrucksweise, besonders merkwürdig die daraus gezogene Folgerung.

Eine Fläche ist eine stetige Linien-Folge[1]) in der Ausdehnung ihrer Breite. Die einfachste Fläche ist daher eine Aufeinanderfolge von Linien, welche durch zwei sich schneidende Gerade bestimmt ist. Die Linien aber, welche durch je zwei Punkte der beiden sich schneidenden Geraden bestimmt werden, sind Gerade. Die einfachste Fläche entsteht also, wenn eine Gerade an zwei sich schneidenden Geraden entlang bewegt wird. Eine solche Fläche ist die Fläche der Tafel, die Fläche des Papiers etc. Sie kennzeichnet sich dadurch, dafs auf derselben keine Erhöhung oder Vertiefung[2]) wahrgenommen wird, dafs sie also eben erscheint.

Ebene heifst die durch zwei sich schneidende Gerade bestimmte Fläche.

Eine Ebene ist eine stetige Aufeinanderfolge von Geraden entlang an zwei sich schneidenden Geraden.“

Schlegel, System der Raumlehre. — Leipzig 1872.

Die Lagenänderung einer Geraden wird Schiebung genannt. Findet die Schiebung so statt, dafs jeder Punkt eine Gerade beschreibt (eine einfache Bewegung macht), so heifst die Bewegung einfach.

„Wenn eine Gerade ihre Lage durch einfache Bewegung[3]) ändert, so heifst das von ihr erzeugte Gebilde eine Ebene.“

„Die Eigenschaften einer Ebene sind bestimmt:

1) Durch Lage und Richtung einer sie erzeugenden Geraden; 2) durch Lage und Richtung einer zweiten Geraden,

---

[1]) Ich halte diesen Ausdruck in einem für Schüler bestimmten Buche für gefährlich, da er gar zu leicht Veranlassung geben kann zu dem Glauben, die Fläche sei aus Linien zusammengesetzt. — Vergleiche die Rezension in H. Z. XVII. p. 50/51.

[2]) Erhöhung und Vertiefung setzen den Begriff der Ebene ja voraus: was über die Ebene hinausragt, heifst Erhöhung, eine Stelle, welche in der Fläche, aber unter der Ebene sich befindet, eine Vertiefung.

[3]) Der hier in die Erklärung der Ebene eingeführte Begriff der einfachen Bewegung ist kein allgemein gültiger; aufserdem kommt ihm — selbst von dem ersten Einwurf abgesehen — durchaus keine deutlichere Vorstellbarkeit zu, als dem Begriff der Ebene selbst. Vergl. Günthers Besprechung in H. Z. VIII. p. 47.

die von einem der ersten angehörigen Punkte beschrieben wird; oder, da man beide Gerade durch dieselbe Lage[1]) bestimmen kann:

1) durch Lage und Richtung einer sie erzeugenden Geraden;

2) durch die Lage eines beliebigen festen, aufserhalb dieser Geraden in der Ebene liegenden Punktes;

oder, wenn man auch die in 1) genannte Gerade durch zwei Punkte ersetzt:

1) durch die Lagen dreier nicht in derselben Geraden liegenden Punkte.

Die Merkmale einer Ebene sind hiernach vorläufig: Eine Lage und zwei Richtungen; oder zwei Lagen und eine Richtung; oder drei Lagen.

Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik. — Wolfenbüttel 1879.

Auch in diesem Lehrbuche geht Schlegel von dem Begriffe der einfachen Bewegung aus bei der Definition der Ebene (wie auch der Geraden). Auf die Bewegung, ihr Wesen (Freiheit) etc. wird genauer eingegangen[2]) und als wesentliche Merkmale der Ebene ausgesprochen:

„Die Ebene ist 1) zweimal ausgedehnt; 2) einfach; 3) unbegrenzt; 4) unendlich; 5) in sich beweglich.“

---

von Swinden, ed. Jakobi. — Jena 1834.

„Eine ebene Fläche oder Ebene ist diejenige Fläche, welche durchaus dieselbe Lage zwischen ihren Grenzen hat.“ Eukl. I. Erkl. 7. — L. G. I. Erkl. 6.

„Anmerkung 1. Andere erklären Ebene als diejenige Fläche, welche eine gerade Linie in allen ihren Teilen berühren

---

[1]) Dieser Ausdruck ist an sich unklar. Es ist gemeint, dafs die beiden Geraden einen Punkt gemeinsam haben.

[2]) Ich mufs wiederholt auf den Artikel Bewegung, die allerdings erst im II. Bande besprochen wird, und auf meine im Kapitel III gegebenen vorläufigen Bemerkungen hinweisen.

kann (in welcher sich nach allen Richtungen gerade Linien ziehen lassen J.)“ S. Clavius über die 7. Erkl. im ersten Buche des Eukl.

Anmerkung 2. Es verhält sich mit dieser Erklärung, wie mit allen Erklärungen von Dingen, die zu einfach sind, als dafs sie noch einer Erklärung durch Worte fähig wären — sie sind alle ungenügend und mehr oder weniger dunkel.[1])

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik.[2]) — Göttingen 1822.

p. 171. „Man darf das, was eine ebene Fläche ist, wohl als bekannt voraussetzen, obgleich eine solche durch Hilfe der geraden Linie noch erklärt werden kann.“

p. 176. „Durch Hilfe der geraden Linie kann die, übrigens ursprüngliche, Vorstellung der ebenen Fläche näher bezeichnet werden.“ Es folgt dann eine der üblichen Erklärungen.

---

[1]) J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe, bemerkt dazu: „Glaubt aber jemand, dafs solche Definitionen, wenn sie auch nichts nutzen, doch mindestens nichts schaden können, so sei folgendes bemerkt: Man will in Schulen an Klarheit der Begriffe und vollkommene Schärfe des Ausdrucks gewöhnen, und beginnt mit unklaren und unzutreffenden Erklärungen, deren Fehlerhaftigkeit der Schüler herausfühlt, — Erklärungen der einfachsten Grundlagen, deren Begriffe im Bewufstsein des Schülers von vornherein fester und klarer vorhanden sind, als irgend welche Kenntnisse, die ihm die Schule beibringt.“ Man vergleiche am angeführten Orte die weiteren Ausführungen.

[2]) Hankel sagt in seiner Antrittsrede zu Tübingen „Die Entwicklung etc.“: „In Göttingen lehrte neben Gaufs seiner Zeit ein wissenschaftlich ganz unbedeutender Mathematiker, Thibaut, die Elemente vor hundert Zuhörern aus allen Fakultäten, während Gaufs kaum ein halbes Dutzend aufbrachte. Wenn ich die Wahl hätte, — möchte ich lieber Gaufs, als Thibaut sein.“ Dazu bemerkt Günther in seiner Programmarbeit „Der Thibautsche Beweis etc.“: „Der Grundrifs von Thibaut kann überhaupt für jene Epoche als ein wahres Muster einer populärwissenschaftlichen Darstellung umfassenden Stoffes bezeichnet werden, und wer dasselbe kennt, wird auch nur mit tiefem Bedauern die hohlen Deklamationen lesen können, welche der sonst so feinsinnige Hankel gegen dessen Verfasser richtet.“ Ich mufs gestehen, dafs mich dieses Urteil Günthers wahrhaft befriedigt und — in gewisser Hinsicht — beruhigt hat.

Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830.

„Eine Fläche ist entweder eben oder krumm. Dies sind einfache Begriffe.“ „Als Kennzeichen einer Ebene kann man angeben, dafs die gerade Verbindungslinie jeder zwei Punkte derselben ganz in sie fällt.“

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

p. 409. „Unter Ebene wird die Fläche verstanden, deren allen Teilen eine gerade Linie angefügt werden kann,[1]) oder genauer, welche so beschaffen ist, dafs jede gerade Linie, die durch zwei beliebige Punkte der Fläche gelegt ist, ganz in die Fläche fällt.“

Klügel, Wörterbuch, Artikel Ebene.

„Ebene ist eine Fläche, auf welcher jede, durch irgend zwei Punkte derselben gezogene gerade Linie mit allen ihren Punkten liegt. Sie ist allenthalben, in gröfseren wie in kleineren Teilen, gleichförmig ausgedehnt, weil auf der geraden Linie die Teile durchgehends eine gleichförmige Lage haben.“

Die Euklidsche Definition wird angeführt und hinzugefügt:

„Er deutet durch jene Erklärung die Gleichförmigkeit der Ausdehnung an einer Ebene an. Wie auch eine Ebene durch gerade Linien begrenzt sein mag, so ist die Form der Fläche selbst dieselbe, nur die Gröfse und die äufsere Gestalt[2]) mögen verschieden sein. Euklides setzt in der That voraus, dafs sich in einer Ebene allenthalben gerade Linien ziehen lassen.“

„Proklus ... versteht die Erklärung der Ebene bei Euklid so, dafs die Ebene zwischen zwei geraden Linien einen Raum einnehme, der so grofs ist als der Raum zwischen diesen Linien.[3])

Schwerlich hat Euklid dieses sagen wollen.“

---

[1]) „Cujus omnibus partibus recta linea congruit.“ Procli in primum Eukl. element. libr. Comment. liber IV, a Francisco Baccio Fabritio Veneto editi. Patavii 1560. p. 67.

[2]) Besser wohl: die Begrenzung.

[3]) Der Ausdruck ist dunkel. Es soll wohl damit gemeint sein, dafs

Becker, F., Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. — Progr. Hanau 1870.

„Wenn zwei sich schneidende Gerade ausreichen, um die Lage einer Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung (selbst bis ins Unendliche) zu bestimmen, so ist die Fläche eine Ebene.[1]) In ihr kann man nach allen Richtungen ganz in sie hineinfallende Gerade ziehen. Jede andre Ebene, welche durch dieselben zwei sich schneidenden Geraden geht, fällt mit der ersteren (der Lage nach) zusammen, ist also mit ihr einerlei (identisch). Merkmal einer Ebene ist also, dafs sie in zwei Geraden, welche ihr angehören, festgehalten[2]) und nun in umdrehende Bewegung versetzt (wobei sie beständig durch diese beiden Geraden geht) ihre Lage im Raume unverändert beibehält, womit zugleich das weitere Merkmal zusammenhängt, dafs jedes beliebige Stück einer Ebene überall ganz mit ihr zusammenfallen mufs, wenn man es mit zwei in ihm liegenden Geraden an beliebiger Stelle in sie hinein gelegt denkt.“

Helmholtz, Pop. wiss. Vortr. III, 2. „Über den Ursprung etc.“

p. 34: „Wir sehen daraus, dafs in der Geometrie zweier Dimensionen die Voraussetzung, jede Figur könne ohne irgend welche Änderung ihrer in der Fläche liegenden Dimensionen nach allen Richtungen hin fortbewegt werden, die betreffende Fläche charakterisiert als Ebene oder Kugel oder pseudosphärische Fläche. Das Axiom, dafs zwischen je zwei Punkten immer nur eine kürzeste Linie bestehe, trennt die Ebene und pseudosphärische Fläche von der Kugel, und das Axiom von den Parallelen scheidet die Ebene von der Pseudosphäre. Diese drei Axiome sind in der That also notwendig und hinreichend, um die Fläche, auf welche sich die Euklidische Planimetrie

---

die Ebene die kleinste Fläche sei, die sich zwischen zwei Geraden denken läfst. — Man vergleiche übrigens weiter unten: Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid.

[1]) Diese Erklärung hat viel für sich.

[2]) Wenn die Ebene in zwei Geraden festgehalten gedacht wird, so ist sie selbst auch fest und kann nicht mehr gedreht gedacht werden.

bezieht, als Ebene zu charakterisieren, im Gegensatz zu allen andren Raumgebilden zweier Dimensionen."

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie.

„Sind im Raume drei beliebige nicht in gerader Linie liegende Punkte gegeben, durch welche eine willkürliche Anzahl unter sich verschiedener Flächen gelegt ist, und man denkt sich die letzteren alle um irgend zwei jener Punkte so lange herumgedreht, bis sie sämtlich wiederum durch den dritten Punkt gehen (so dafs also diejenigen Seiten der Flächen, die früher die oberen waren, nunmehr die unteren geworden sind), so wird jede einzelne Fläche in dieser neuen Lage mit der im Raume gedachten Spur ihrer anfänglichen Lage nicht zusammenfallen, sondern irgend einen hohlen Raum einschliefsen. Es wird aber stets eine Fläche vorhanden sein oder wenigstens als vorhanden gedacht werden können, welche nach erfolgter Umlegung mit der Spur ihrer ersten Lage allenthalben genau zusammenfällt und keinen hohlen Raum einschliefst. Diese Fläche wird nun eine gerade Fläche oder eine Ebene genannt."

„Auch die Vorstellung der Ebene ist eine Grundvorstellung des menschlichen Geistes."

Crelle, Über Parallelen-Theorien etc. — Berlin 1816.

„Da im Raume durch dieselbe Linie unzählige Flächen liegen können (weil eine Linie zugleich mit den Flächenräumen, die sie sondert, da ist), so bestimmen eine einzelne Linie oder mindestens zwei Punkte, also weniger als drei Punkte, keine Fläche;[1]) also kann eine Fläche nicht in eine andere fallen, wenn beide nicht wenigstens drei Punkte gemein haben."

---

[1]) Aus dieser Bemerkung ergiebt sich die Charakterisierung der Ebene als derjenigen Fläche, welche durch die kleinstmögliche Anzahl von Punkten im Raume bestimmt ist (wie die Gerade diejenige Linie ist, die durch die kleinstmögliche Anzahl von Punkten bestimmt ist). (Leider geht Crelle auf diesen fruchtbaren Gedanken nicht weiter ein, ja er verwertet ihn nicht einmal bei seiner Definition der Ebene.) Hierin liegt die Einfachheit von Gerade und Ebene in dem Sinne, dafs man sie als die einfachste Linie resp. Fläche bezeichnet.

„Eine Fläche unterscheidet sich von der anderen durch ihre Gestalt; daher giebt es unzählige verschiedene Flächen. Man unterscheidet gerade und krumme. Estere heifsen Ebenen. Eine Ebene ist, die an beiden Seiten dieselbe Gestalt hat, so, dafs wenn man die eine Seite der Ebene in die andere, d. h. den körperlichen Raum an der einen Seite in den körperlichen Raum an der andern, und umgekehrt, legt, die Grenzen des Raumes in demselben Orte im Raume bleiben."

„In einer Ebene sind also nach allen Richtungen gerade Linien möglich, die ganz in der Ebene bleiben, weil alle Linien in einer Ebene, gleich der Ebene selbst, an beiden Seiten dieselbe Gestalt haben."

Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie. — Berlin 1826.

„Befinden sich alle geraden Linien, die durch beliebige Paare von Punkten einer Fläche gehen, ganz in der Fläche, so ist die Fläche gerade und heifst Ebene".

Grunert, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Brandenburg 1870.

§ 8: „So wie man zwei Hauptarten der Linien unterscheidet, so unterscheidet man auch zwei Hauptarten der Flächen: ebene und krumme Flächen. Eine ebene Fläche oder eine Ebene ist eine Fläche von solcher Beschaffenheit, dafs jede zwischen irgend zwei in derselben angenommenen Punkten gezogene gerade Linie ganz in sie hineinfällt."

§ 9: „Die vorher gegebene Definition der ebenen Fläche kann im ersten Augenblick für Anfänger einige Dunkelheit haben. Bedenkt man aber nur z. B. wie jeder Tischler untersucht, ob eine glatt gehobelte Fläche eine völlig genaue Ebene bildet, indem er nämlich die Schärfe eines richtigen Lineals nach allen Richtungen an selbige anlegt und zusieht, ob er nirgends zwischen dem Lineal und der zu prüfenden Fläche durchsehen kann, ob also die Schärfe des Lineals sich überall völlig genau an die Fläche anschliefst, so wird alle Dunkelheit bei obiger Erklärung gewifs auf der Stelle verschwinden"....

August, Lehrbuch der Mathematik I. — Berlin 1852.

„Gewisse Flächen können durch Fortbewegung einer Linie entstanden gedacht werden. Ist dabei die bewegte Linie eine gerade und wird sie so bewegt, dafs jeder ihrer Punkte wieder eine gerade Linie, aber in einer andern Richtung bildet, so entsteht eine ebene Fläche oder Ebene."

Dazu kommt als Grundsatz: „Eine gerade Linie, die zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat, liegt ganz in derselben," und ein Forderungssatz: „Durch jede drei Punkte im Raume sich eine Ebene gelegt zu denken und sich dieselbe nach allen Seiten hin beliebig erweitert vorzustellen."

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

„Eine Fläche wird eben oder Ebene genannt, wenn eine Gerade, wie man sie auch in die Fläche legen mag, immer mit dieser zusammenfällt."

Bartholomäi, Gradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

Bartholomäi betrachtet die „Abhängigkeit der Elemente" eines Winkels. Der Übergang des einen Schenkels in den andern findet durch Drehung statt. „Diese Drehung darf nicht willkürlich sein."[1]) Deshalb gleitet der eine Schenkel bei der Drehung auf einer Geraden, die die beiden Schenkel schneidet, hin. Nach einer vollständigen Umdrehung hat der freie Schenkel eine Ebene beschrieben.

„Die Ebene ist diejenige Fläche, in welche alle Geraden zwischen je zwei Punkten derselben fallen."

„Eine Ebene ist durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, vollkommen bestimmt."

Bartholomäi fügt hinzu: „Auf Einfacheres kann die Erzeugung der Ebene nicht zurückgeführt werden." Die Vorstellung der durch drei Punkte bestimmten Ebene und zwar in unendlicher Ausdehnung ist daher ein „Postulat" der Geometrie.

---

[1]) Vergleiche meine Anmerkung zu Deahnas Darstellung in Baltzers Zitat.

Beck, Ebene Geometrie nach Legendre. — Bern 1842.

„Eine ebene Fläche oder eine Ebene ist eine Fläche, auf welche man eine gerade Linie nach allen möglichen Richtungen so legen kann, dafs alle Punkte dieser Linie in der Fläche liegen."

J. K. Becker, Lehrbuch der Elementar-Mathematik II. — Berlin 1877.

„Alle Geraden, die durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene, nicht durch diesen Punkt gehende Gerade schneiden, liegen in einer Fläche, welche ebene Fläche oder Ebene genannt wird.

Die Ebene verbindet alle in ihr liegenden Punkte auf kürzestem Wege, und jede Gerade, welche zwei Punkte mit ihr gemein hat, liegt mithin ganz in ihr.

Eine Ebene wird beschrieben von einer Geraden, welche auf zwei anderen sich schneidenden hingleitet, oder von einer Geraden, die sich um einen ihrer Punkte so dreht, dafs sie dabei eine nicht durch diesen Punkt gehende Gerade schneidet."

Dazu kommt nach der Behandlung der Parallellinien der Satz: „Eine Ebene ist vollkommen bestimmt durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte."

Boymann, Lehrbuch der Mathematik I. — Köln 1877.

Dieselbe Erklärung der Ebene, wie bei Becker in dem vorhergehenden Zitat.

F. Fischer, Anfangsgründe der Mathematik II. — Leipzig 1887.

„Die einfachste aller Flächen ist die ebene Fläche oder Ebene. Man versteht darunter eine Fläche von solcher Beschaffenheit, dafs jede Gerade, welche zwei Punkte derselben verbindet, ganz in ihr liegt."

Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik I. — Liegnitz 1889.

„In jeder Fläche kann man von jedem Punkte aus beliebig viele Linien ziehen. Sind dieselben alle gerade, dann heifst die Fläche eine ebene Fläche oder eine Ebene."

Frantz, Die Philosophie der Mathematik. — Leipzig 1842.

„Die Ebene ist das Aufsersichsein, und zwar der Linie, der Richtung des Raumes.[1]) Damit hat sich das Sich-Unterscheiden des Raumes als seiendes Aufsereinander selbst bestimmt. Die Ebene ist selbst der Raum. Aber der Raum ist jetzt als Ebene bestimmt, — durch die zwei Dimensionen. Damit ist überhaupt die Bestimmtheit an den Raum getreten. Dieser Widerspruch aber, dafs der Raum, das absolute Aufsereinander, ein bestimmter sei, wird sich weiterhin zum totalen Raume entwickeln.

In der Ebene als Raum wiederholt sich zunächst das zuvor betrachtete Spiel des Raumes, dafs sie in sich Richtungen, Linien setzt. Aber wie die Ebene bestimmter Raum ist, haben auch die Richtungen in ihr nicht überhaupt eine Beziehung zu einander, sondern eine bestimmte Beziehung — durch die zwei Dimensionen, welche die Ebene bestimmen — die sich bei allem sonstigen Unterschied, der Richtung erhält; sie sind in der Ebene, die selbst bestimmt ist allenthalben gerade Linie zu sein."

Die weitläufige, weitere philosophische Betrachtung der Ebene, die sich auf den Begriff der Richtung und der Kurve stützt, schliefst mit den Worten:

„Die Ebene entstand uns als die Rückkehr der Linie, als Richtung, aus dem Aufsersich zu sich.[2]) Als solche mani-

[1]) Dieses Zitat kann als Muster mystisch-philosophischer Begriffserklärung gelten. Man möge es also in diesem Sinne auffassen, wenn ich die Betrachtungen von Frantz in dieser ausführlichen Weise zitiere. Man möge übrigens diese Ausführungen vergleichen mit den entsprechenden bei Schmitz-Dumont, um wahrhaft mathematisch-philosophische Betrachtung im Gegensatz zu dieser philosophierenden, geistreich sein sollenden Untersuchung zu erkennen und zu würdigen.

[2]) Auf diese Stelle sei noch besonders aufmerksam gemacht. Ich kann es mir nicht versagen, zur Vergleichung eine Stelle aus Hegel anzuführen, obwohl sie inhaltlich zu dem Vorliegenden in gar keiner

festiert sich die Ebene in der Kurve, in welcher sie darum ihre Bestimmung erreicht hat. Es ist sonst nichts an der Ebene zu erkennen."

Bei der Betrachtung des Körpers heifst es dann weiter: „Die Ebene ist bestimmter Raum. Aber wir betrachteten sie bisher so, dafs sie überhaupt nur Bestimmtheit in sich habe, nämlich die, allenthalben gerade Linie zu sein. Sie ist aber selbst eine bestimmte, diese. Indem sie bestimmter Raum ist, unterscheidet sich in ihr der Raum von sich als dem Allgemeinen. Als sich richtend war er zur Ebene geworden, und die Ebene ist selbst nur eine Richtung; so ist sie eine bestimmte unter andern. Indem sich der Raum als Ebene setzt, setzt er viele Ebenen. Danach ist die Ebene nicht der Raum, als vielmehr im Raume, der wie früher in Linien jetzt in Ebenen sein Aufsereinander realisiert."

Frischauf, Absolute Geometrie.[1]) — Leipzig 1872.

p. 2. „Eine Fläche, welche durch drei Punkte bestimmt ist, heifst eine Ebene."

Im Anhang p. 81 heifst es hierzu:

„Die Gerade und die Ebene werden in der Geometrie gewöhnlich axiomatisch vorausgesetzt. Von den Versuchen dieselben durch einfachere Axiome zu ersetzen, soll der von Wolfgang Bolyai gegebene mitgeteilt werden.

Beziehung steht. In Hegels „Encyklopädie der philosophischen Wissenschaften" heifst es in § 12: „Das Wesen, als das durch die Negativität seiner selbst sich mit sich vermittelnde Sein, ist die Beziehung auf sich selbst, nur indem sie Beziehung auf Anderes ist, das aber unmittelbar nicht als Seiendes, sondern als ein Gesetztes und Vermitteltes ist." Darin ist, wie ein Kritiker bei Besprechung einer ähnlichen Philosophirerei sich treffend geäufsert hat, Sinn, Nichtsinn und Unsinn.

[1]) Man vergleiche: Beltrami, Essai d'interpretation de la géometrie non euklidienne traduit de l'italien par M. J. Hoüel, extrait du Giornale de Matematiche, t. VI, 1868. — besprochen in H. Z. II. p. 130. — Frischaufs Werk selbst ist in H. Z. VII. p. 464/69 durchaus beifällig besprochen von Killing, während Pietzker ebenda p. 469/74 gegen Frischauf vorgeht. Eine Würdigung dieser Einwürfe findet sich bei Günther, Der Thibautsche Beweis etc. — Die Entgegnung Killings findet sich in H. Z. VIII. p. 220.

Der Grundgedanke besteht in folgendem: Um die Ebene zu erhalten, denke man sich von zwei Punkten O und O' (als Mittelpunkten) fortgesetzt (konzentrische) Kugeln mit (demselben aber) immer gröfser werdendem Radius beschrieben. Der Inbegriff der Durchschnittslinien je zweier Kugelflächen mit gleichem Radius ist eine Ebene."[1])

Nach einer längeren Ausführung dieses Gedankens, der zum Begriff der Geraden führt, wird noch folgende Konstruktion der Ebene gegeben.

p. 87: „Eine Kreislinie als Durchschnittslinie zweier gleicher Kugelflächen werde in den Punkten A und B halbiert.[2]) Durch die Punkte A und B ist eine Gerade bestimmt; es sei ferner C die Mitte der Strecke AB. Eine der beiden Hälften der Kreislinie werde in D halbiert, so ist durch die Punkte C und D eine zweite Gerade CD bestimmt, welche senkrecht auf der Geraden AB genannt wird. Dreht man die erhaltene Figur um AB, so beschreibt die Gerade CD eine Ebene.

Funck, Das Euklidische System der Geometrie der Ebene. — Berlin 1864.

„Eine ebene Fläche oder Ebene ist diejenige, welche zwischen ihren Grenzen[3]) durchaus dieselbe Lage hat, dafs jede zwei Punkte in ihr, geradlinig verbunden, eine gerade Linie liefern, welche ganz in sie hineinfällt."

---

[1]) Günther sagt in einer Besprechung der II. Auflage der Elemente desselben Verfassers in H. Z. IX. p. 222: „Statt wie vordem „Ebene und Gerade" hat der Verfasser, dessen Spezialität ja bekanntlich die absolute Geometrie ist, nunmehr „Kugelfläche und Kugellinie" an die Spitze gestellt und deduziert erstere aus letzterer. Dann erst folgt die Lehre von den Ebenen und Geraden im Raume. Referent hält dieses Verfahren, die Kugelfläche in den Vordergrund zu stellen, für pädagogisch richtig und möchte demselben sogar eine noch weitere Ausdehnung gegeben wissen."

[2]) Aus der beigefügten Figur geht hervor, dafs A und B zwei entgegengesetzte Punkte des Kreises sind.

[3]) Damit fällt die unendliche Ebene ganz aus der Betrachtung heraus; es hätte sonst genauer heifsen müssen: wenn man sich irgend einen Teil der Ebene denkt, so hat er zwischen seinen Grenzen durchaus dieselbe Lage. Aber dieser Ausdruck bedarf selbst wieder einer Erläuterung.

Helmes,[1]) Die Elementarmathematik II. — Hannover 1874.

„Von allen Flächen ist ausgezeichnet durch ihre Einfachheit[2]) und durch die leicht vermittelte Bestimmtheit ihres Begriffs die ebene Fläche oder die Ebene."

Der Erklärung der Ebene resp. der Darlegung ihrer Beschaffenheit und der Vergleichung mit Beispielen folgen die Worte: „Dafs es aber wirklich eine Ebene giebt,[3]) hat sich, ungeachtet auf der Voraussetzung des Begriffs das ganze Gebäude der Geometrie beruht, bis auf den heutigen Tag noch nicht beweisen lassen; der Begriff der Ebene gehört zu den Grundvorstellungen." Helmes weist dann noch auf Deahnas in Baltzers Zitat erwähnten „scharfsinnigen" Versuch, die Statthaftigkeit des Begriffs der Ebene und die Wirklichkeit derselben zu beweisen hin und auf Crelles und Erbs Arbeiten. Es wird alsdann der Satz bewiesen: „Wenn zwei Ebenen drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte miteinander gemein haben, so sind sie nicht zwei verschiedene Ebenen, sondern sie fallen ganz miteinander zusammen; oder durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte ist die Ebene bestimmt."

Heinze, C., Die Elementargeometrie. — Berlin 1877.

„Sind eine gerade Linie und ein aufserhalb derselben liegender Punkt gegeben, so ist die Zusammenfassung aller Punkte, die von dem gegebenen Punkte aus vor der gegebenen geraden Linie liegen, die geometrische Ebene." Dazu kommt noch die Erklärung:

---

[1]) Besprochen in H. Z. VII. p. 134 f. — Durchaus anerkennend.

[2]) Vergleiche meine obigen Ausführungen über diesen Begriff und die Anmerkung zu dem Zitat aus Crelle, Parallelentheorien.

[3]) Ob es in Wirklichkeit eine Ebene giebt, ist von gar keiner Bedeutung. Es ist diese Frage eine von denen, von denen Kant sagt, dafs man, ehe man sie zu beantworten suche, sich zuerst fragen müsse, ob man sie vernünftiger Weise auch stellen dürfe. Und ähnlich äufsert sich Hankel bei der Besprechung des Parallelenproblems. „Mit Recht verzichtete Euklid und mit ihm die folgenden Geometer auf den Beweis. Hätten sie das nicht gethan, so . . . wäre die Mathematik just so weit gekommen, als die Methaphysik mit dem Begriffe des Seins . . ."

„Denkt man sich eine gerade Linie *ab* und dann einen Punkt *c*, der nicht in dieser geraden Linie oder deren Verlängerung liegt, so kann man sich noch einen zweiten Punkt *d* denken, der vom gegebenen Punkte aus vor der geraden Linie liegt. Derselbe kann vom gegebenen Punkte aus vor der geraden Linie überall gedacht werden, bald näher dem gegebenen Punkte oder der geraden Linie, bald weiter von dem einen oder der andern. Nimmt man alle diese Punkte zusammen, so hat man die geometrische Ebene.“[1]) Aus dieser Art der Auffassung folgt direkt, dafs die Ebene durch einen Punkt und eine Gerade oder durch drei Punkte bestimmt ist. Die Möglichkeit der unendlichen „Verlängerung“ wird ausdrücklich hervorgehoben.

Menger, Grundlehren der Geometrie. — Wien 1881.
„Jede Ebene kann dem Auge als Gerade erscheinen.“

J. H. T. Müller, Lehrbuch. — Halle 1844.

Nach der gewöhnlichen Erklärung der Ebene[2]) und einigen daraus abgeleiteten Sätzen wird noch folgende Betrachtung hinzugefügt:

„Die Ebene ist die kleinste von allen begrenzten Flächen, welche sich zwischen einer und derselben in dieser Ebene liegenden Grenzen denken lassen.

Zur Erläuterung können Stücke von Kugeln, Kugelkappen u. s. w. gebraucht werden. — Unsere Sprache hat keinen Ausdruck für das dem Abstande bei den Linien Entsprechende.“[3])

---

[1]) Diese Erklärung Heinzes ist identisch mit derjenigen, dafs man die Ebene unter Umständen als eine gerade Linie sieht. Mir scheint dieselbe nicht ohne Wert zu sein. Man vergleiche das folgende Zitat aus Menger.

[2]) J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe, in H. Z. I. p. 233 bemerkt zu der Müllerschen Definition: „Trotz aller Künstelei ist nicht genug gesagt, um die Ebene von der Kugelfläche sicher zu unterscheiden.“

[3]) Man vergleiche das Zitat von Ebensperger und meine Anmerkung dazu. Übrigens könnte man analog dem Abstand zweier Punkte viel-

Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823.

„Wenn eine Fläche die Beschaffenheit hat, dafs sie von einer geraden, sie in zwei Punkten berührenden[1]) Linie auch in allen übrigen zur geraden Linie gehörigen Punkten berührt wird; und dieses nicht in einer besonderen Lage der geraden Linie allein, sondern in allen möglichen Lagen derselben stattfindet; — so heifst eine solche Fläche eine Ebene.“

Schmitz-Dumont, Mathematische Erkenntnistheorie. — Berlin 1878.

„Das durch zwei Dimensionen in unbeschränkter Ausdehnung bestimmte Gebilde heifst Ebene.[2])

Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1888.

„Wir gehen nun zur Definition der Ebene über, welche keine Schwierigkeit darbietet, sobald eine stichhaltige Erklärung der Geraden gegeben ist.

Nach Euklid ist die Ebene diejenige Fläche, welche zwischen den in ihr befindlichen Geraden auf einerlei Art liegt. Dasselbe kann man aber auch von jeder in die Ebene abwickelbaren Fläche, insbesondere vom Cylinder und dem Kegel be-

---

leicht auch von dem Abstande zweier sich schneidenden Geraden sprechen. Es würde sich dann nur darum handeln den Begriff der kürzesten Drehung als Drehungsabstand zu bezeichnen und in die Geometrie einzuführen. Allerdings träfe dieser Ausdruck dann nur zu für zwei sich schneidende Gerade, während man bei Parallelen von der kürzesten Verschiebung sprechen müfste. Beide Fälle liefsen sich aber zusammenfassen in dem zu normierenden Begriff des Abstandes zweier Geraden. Die Schwierigkeit liegt darin, dafs die sich kreuzenden Geraden aus der Betrachtung auszuscheiden sind; dafs also die obige Begriffsbestimmung nicht allgemein gültig ist. Vergl. Zitat aus Majer.

[1]) Durch den Ausdruck „berühren“ wird der Begriff der Ebene vorweg genommen; es hätte heifsen müssen: Wenn eine gerade Linie, sobald sie zwei Punkte mit einer Fläche gemeinsam hat, dann auch jedesmal alle Punkte mit ihr gemeinsam hat, so heifst die Fläche Ebene.

[2]) Diese Erklärung stimmt mit der von mir gegebenen Definition überein.

haupten.“ Nach Proklos sei Euklids Definition durch Vertauschung der Gattungen — ebenso wie bei der Geraden — nämlich der Linie mit der Fläche gebildet.[1]) Die übrigen Bestimmungsarten der Ebene werden erwähnt, darunter auch diejenige als Minimalfläche zwischen ihren Grenzen und als die Fläche, deren Inneres durch das Äufsere verdeckt wird.[2]) Nach Killing,[3]) dem neuesten Bearbeiter der Nicht-Euklidischen Geometrie, sei die Ebene charakterisiert durch die drei Eigenschaften:

„1) Bei der Ruhe eines jeden (d. h. irgend eines) ihrer Punkte kann die Fläche noch in sich bewegt werden, jeder Punkt beschreibt eine (durch den ruhenden Punkt und die Anfangslage des bewegten Punktes) bestimmte Linie und kehrt auf derselben bei fortschreitender Bewegung in die Anfangslage zurück.[4])

2) In der Fläche giebt es in sich verschiebbare Linien, welche umkehrbar sind (gerade Linien) oder mit anderen Worten: bei einer gewissen Bewegung der Ebene kann eine solche Linie in sich verschoben werden, bei einer anderen, nämlich der Drehung um einen Punkt der Linie, kann die Linie als Ganzes wieder in die Anfangslage gelangen, während die einzelnen Punkte ihre Lage vertauschen.

3) Die Fläche selbst ist umkehrbar d. h. man kann sie so um eine in ihr liegende Gerade drehen, dafs sie als Ganzes die Anfangslage wieder einnimmt, während die Punkte nicht in die frühere Lage zurückkehren.“ Beez bemerkt dazu: „Flächen müssen bei diesen Erklärungen offenbar als starr und unbiegsam angesehen werden, denn sonst liefsen sich dieselben drei Eigenschaften auch an Flächen konstanter positiver wie negativer Krümmung nachweisen.“ Es heifst dann weiter: „Wenn der Verfasser hinzufügt: ‘dafs diese Voraussetzungen in den

---

[1]) Man vergleiche weiter unten das Zitat aus Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid.

[2]) Was dieser Ausdruck bedeuten soll ist mir nicht klar.

[3]) Killing, Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. — Leipzig 1885. Besprochen in H. Z. XVII. p. 209.

[4]) Dies trifft auch zu für die Kugelfläche und in eingeschränktem Mafse auch für die Kegelfläche.

ersten Definitionen Euklids enthalten sind, bedarf keines Nachweises', so kann dies doch unmöglich auf die Eigenschaft der Umkehrbarkeit sich beziehen, die meines Wissens weder von Euklid, noch von einem andern griechischen Mathematiker postuliert wird." Beez geht dann näher auf diese Frage ein und verteidigt seinen auch von mir vertretenen Standpunkt, dafs entgegen Euklid der Punkt nicht Ausgangspunkt der Betrachtung sein dürfe. Nach Beez ist Leibniz der erste, welcher das Prinzip der Umkehrbarkeit ausgesprochen.[1]) „Er definiert in einem Briefe an Giordano die Ebene als diejenige Fläche, welche den Raum in zwei kongruente Teile zerlegt. Mit Recht wandte indessen Giordano ein, dafs man sich Flächen und Linien denken könne, welche den Raum beziehentlich die Ebene ebenfalls in zwei kongruente Teile zerlegten, ohne aber eben oder gerade zu sein. Es fehlt offenbar in der Leibnizschen Definition die zweite Bestimmung, dafs die beiden kongruenten Räume ineinander verschoben werden können, ohne dafs die Grenzflächen aufhören miteinander zusammenzufallen, mit anderen Worten die Voraussetzung, dafs die Ebene in sich selbst verschiebbar ist." Beez beansprucht für sich die Priorität der vervollständigten Definition und weist die Einwände, die vom pädagogischen und wissenschaftlichen Standpunkt aus gegen die Definition erhoben werden, zurück.

---

[1]) Vergleiche Baltzer. — Vergleiche Günther, Der Thibautsche Beweis etc.: „Die nicht-euklidische Geometrie nämlich, deren kritischen Leistungen auch der konservativste Geometer seinen Beifall nicht versagen sollte, hat dadurch ein neues bedeutsames Ferment in die Erörterung gebracht, dafs sie die Umkehrbarkeit für Ebene und gerade Linie betont. Man mag diese beiden Grundgebilde wie immer aus dem Raumbegriff selbst oder, wie es die verbesserte Methode der Neueren will, aus Kugel und Kreis herleiten, stets erheben sich die allergröfsten Schwierigkeiten, zu beweisen, dafs eine . . . Strecke . . . umkehrbar sei." Es wird verwiesen auf: Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung, Erlangen 1876. S. 77 ff. — und auf: Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage, I. S. 9 ff. u. S. 23 ff. In Bezug auf das letztere sagt Günther: „Neuerdings sind es besonders die Arbeiten J. C. Beckers, die den sekundären Charakter der früher als ursprünglich angesehenen Begriffe Gerade und Ebene bestimmt hervortreten liefsen."

Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempen 1879.

„Unter den verschiedenartigsten Flächen zeichnen sich die ebenen Flächen dadurch aus, dafs sie stets ineinanderfallen, wenn man sie auch auf verschiedene Weise zusammenlegt.“

Wernicke, Geometrie des Mafses. — Braunschweig 1887.

p. 27: „Axiom II. In unserem Raume giebt es eine unbegrenzte Fläche, welche dadurch erzeugt werden kann, dafs man eine Gerade in einem ihrer Punkte festhält und dieselbe auf einer anderen Geraden gleiten läfst: diese Fläche wird ebene Fläche oder Ebene genannt.“

Dieselbe wird als Elementargebilde unseres Raumes bezeichnet.

„Welchen erkenntnistheoretischen Wert die beiden Axiome (nämlich aufser dem oder vor dem der Ebene das Axiom I. der Geraden) haben, auf welchen wir unsere Geometrie aufbauen, mag hier dahingestellt bleiben: für den Mathematiker sind sie einfach Voraussetzungen, welche er machen mufs, falls er eine Geometrie begründen will, welche für die Untersuchung und Darstellung der Aufsenwelt brauchbar ist.“

p. 33: „Jede Ebene ist in sich kongruent, d. h. sie läfst sich in jeder Kopie, welche mit ihr zusammenfällt, verschieben, ohne Biegungen und Dehnungen ausgesetzt zu sein.“

„Jede Ebene hat mit einer ihrer Kopien zwei Lagen der Deckung (abgesehen von den Verschiebungen in sich selbst), und zwar gelangt man von der einen zur andern durch Drehung der Ebene um jede in ihr gelegene Gerade (Umkehrbarkeit).“

H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. — Berlin 1889.

Auf die Erzeugung der Ebene durch eine um einen Punkt sich drehende und zugleich an einer zweiten Geraden gleitende Gerade wird ausführlich eingegangen und daraus die üblichen Folgerungen gezogen. Zugleich giebt Müller einen Apparat an, dessen er sich zur Veranschaulichung des Vorgangs bedient.

Martini, Die Krümmung ebener Kurven etc. — Rottweil 1877.

Es werden die zwei Seiten einer Fläche verglichen, wobei es vorkommen kann, dafs „die beiden Flächen durchaus gleich gestaltet" sind.[1]) Ist dies der Fall, so „gelangt man zu einer Fläche, in welcher keine Seite nirgends weder hohl noch erhaben ist,[2]) in welcher somit jede Seite in ihrer ganzen Ausdehnung eben und folglich eingestaltig ist." „Die Ebene ist diejenige Fläche, deren beide Seiten durchweg gleich gestaltet sind."[3])

Nach näherer Ausführung heifst es: „Nach dieser Definition erscheint die Ebene offenbar als die denkbar einfachste Fläche. Weil die beiden Seiten einer Fläche gleich grofs sind, da sie sich ja in ihrer ganzen Ausdehnung gegenseitig berühren,[4]) so sind die beiden Seiten einer Ebene, weil noch gleich gestaltet, kongruent."

Hieran schliefsen sich noch ausführliche Betrachtungen über die Verhältnisse bei Drehung und Verschiebung von Ebenenteilen.

Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid. — Stuttgart 1881.

„Die älteren Philosophen beliebten die Ebene nicht als eine Art der Fläche zu nehmen, sondern beides als dasselbe zur Darstellung einer zweidimensionalen Gröfse. Denn so hat der göttliche Plato die Geometrie als Lehre von den Ebenen bestimmt, indem er sie der Stereometrie entgegensetzte, wie wenn Ebene und Fläche dasselbe wäre. Und ebenso der wunderbar grofse Aristoteles.

---

[1]) Wie schon oben ausgeführt, hat die Fläche selbst keine zwei Seiten; man kann sie aber von zwei Seiten aus betrachten. Das ist auch hier gemeint.

[2]) Dafs hierin die Voraussetzung der Ebene liege, habe ich weiter oben gezeigt. — Vergl. Anmerkung zu Schindlers Zitat.

[3]) Vielleicht liefse sich diese Definition so geben: Diejenige Fläche, die von beiden Seiten betrachtet durchaus dieselbe Gestalt zeigt, heifst Ebene.

[4]) Ein unglücklicher Ausdruck. Danach macht es den Eindruck, als könne man etwa eine Ebene in zwei zerlegen: in die linke Seite und die rechte Seite.

Euklid aber und seine Nachfolger erklärten die Fläche für das genus, die Ebene für die species, wie die Gerade im Verhältnis zur Linie. Deshalb bestimmt er auch die Ebene abgesondert von der Fläche nach Analogie der Geraden; denn er erklärt diese als gleich mit dem Zwischenraume zwischen den Punkten, und ebenso nehme auch die Ebene, wenn zwei Geraden gegeben seien, den gleichen Raum ein mit dem zwischen den Geraden gelegenen."[1])

„Manche könnten auch sagen, sie sei die kleinste von Flächen, welche dieselben Grenzen haben..., und so wird man alle Definitionen der Geraden auf die Ebene übertragen können, indem man nur das genus ändert."

Majer geht in seiner Besprechung besonders auf die Vertauschung von genus und species näher ein, „die sich leider auch in einer Menge der neuesten Lehrbücher der Geometrie findet." Ich werde in dem Kapitel, das der Geraden gewidmet ist, ausführlicher auf die vorliegende Abhandlung eingehen.

Damit sollen die Zitate über die Ebene ihr Ende finden. Es hat sich gezeigt, dafs im wesentlichen die Definition der Ebene sich auf den Begriff der Geraden stützt,[2]) während er nach unserer Ansicht nur aus dem Begriff der Richtung

[1]) Vergl. Funcke, Grundlagen der Raumwissenschaft, besprochen in H. Z. IX, p. 23—28. — Danach definiert Funcke die Ebene „als diejenige Fläche, welche eine Gerade bei der Drehung um einen ihrer Punkte beschreibt, wenn sie bei kleinster Drehung in eine andere Lage gelangen soll." Killing empfiehlt das Buch sehr.

[2]) Man vergleiche J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. H. Z. I. p. 232:

„Der Begriff Ebene hat ursprünglich mit geraden Linien nichts zu thun. . . . Wenn nun in der Definition vorausgesetzt wird, dafs sich in jedem Punkte nach jeder Richtung gerade Linien ziehen lassen, so ist dies zwar richtig, darf aber nicht der Erklärung von Ebenen vorausgeschickt werden, sondern müfste als Grundsatz auf dieselbe folgen."

„Genau genommen erscheint übrigens die Definition unbestimmt. da sich über den Kugelmantel ganz dasselbe sagen liefse, wenn man nur, was durchaus nicht widersinnig wäre, die keineswegs deutlichen Worte „auf einerlei Art" (in Euklids Definition) in entsprechender Weise auffassen wollte."

hervorgeht oder nur aus demjenigen des Abstandes, den beiden Grundbegriffen a priori, die ich als unmittelbare Begriffe a priori bezeichnen möchte, während Ebene und Gerade als mittelbare Begriffe a priori aufzufassen sind.[1]

V. Kapitel.

Die Gerade.

Ebenso wie die Ebene ist auch die Gerade eine a priori im menschlichen Geiste vorhandene Vorstellung, ein Grundbegriff a priori. Ja, wenn zwischen diesen Grundbegriffen eine Unterscheidung gemacht werden könnte, so würde der Geraden eine höhere Apriorität zugesprochen werden müssen, da der Begriff der Ebene in der That sich auch aus demjenigen der Geraden ableiten läſst. Eine Definition der Geraden erscheint — nach dem Urteil Vieler — für den Unterricht unnötig, ja unmöglich, es genüge an die bekannte Vorstellung anzuknüpfen, dieselbe durch passende Übungen zu vollem Bewuſstsein zu bringen. Nach meinen Auseinandersetzungen in Kapitel III. würde ich — analog der Definition der Ebene — für die Definition der Geraden folgende Fassung vorschlagen: Die Gerade ist diejenige Linie, die *in ihrer Gesamtheit* nur eine Dimension hat (nur nach einer Dimension ausgedehnt ist). — Dabei bleibt das schwere Bedenken, das auch schon bei der Definition der Ebene berührt wurde, daſs sich die Definition auf einen neuen Begriff, denjenigen der Dimension stützt, der für sich wiederum eine Erklärung fordert.

Die gröſste Anzahl der üblichen Definitionen knüpft an den Begriff der Richtung an — und es ist offenbar, daſs hierzu eine gewisse Berechtigung vorhanden —: die übrigen Eigenschaften der Geraden, besonders die, die kürzeste zu sein, werden dann als Axiome, meist unvermittelt, hinzugefügt.[2]

---

[1]) Man vergleiche das folgende Kapitel.

[2]) Ciala in H. Z. II. p. 43 will die Definitionen der räumlichen Gebilde auf die Ursachen der Bewegung, die Kräfte zurückgeführt wissen.

Die Schwierigkeit, die bei der Definition der Geraden auftritt, liegt eben in dieser doppelten Wesenheit: die übrigens auch bei anderen räumlichen Gebilden zu beachten ist und deren Nichtberücksichtigung unvollkommene Erklärungen veranlafst hat. Bei der Betrachtung der räumlichen Gebilde als selbständiger Formen müssen wir den umgekehrten Weg einschlagen, als bei ihrer Ableitung aus der Grenzbetrachtung. Sollen die Definitionen besonderer Arten von Flächen oder Linien gegeben werden, so ist es passend — insofern wir die besondere Art nicht als einen Grundbegriff a priori anzuerkennen vermögen — vom Punkt auszugehen und von diesem her zu einer Definition zu gelangen. Selbstverständlich ist, dafs dabei gewisse Grundbegriffe a priori vorhanden sein müssen, auf die die Definition zurückgreift und sich stützt. Als die Grundbegriffe, auf die sich die Definition der räumlichen Gebilde zu stützen hat, bezeichne ich zwei: 1) den Begriff der Richtung; 2) den Begriff des Abstandes. Beide sind unmittelbare Grundbegriffe a priori und völlig gleichberechtigt. Setzen wir in Gedanken zwei Punkte, so ist damit sofort auch Richtung und Abstand gesetzt. Dabei wird man von folgender Betrachtung auszugehen haben: Wird ein Punkt gesetzt, so giebt es von ihm aus nach unendlich vielen Richtungen und ebenso in unendlich vielen Abständen Punkte. Setzt man dann noch einen zweiten Punkt, so ist damit sofort eine ganz bestimmte Richtung, nämlich von dem gegebenen Punkte aus nach dem zweiten hin, aber auch diejenige vom zweiten nach dem ersten Punkte gegeben: ebenso der Abstand des zweiten Punktes vom ersten, aber auch der Abstand des ersten vom zweiten. Durch einen zweiten Punkt wird also sofort eine bestimmte Richtung festgelegt und ebenso ein bestimmter Abstand. Wir werden weiter unten sehen, dafs das Umgekehrte

---

Es heifst: „Wir definieren nun: Bewegt sich ein Punkt unter dem Einfluss einer Momentankraft und keiner anderen Kraft aufserdem, so sagt man von ihm, er bewege sich in einer „geraden“ Linie und habe überall dieselbe Richtung. — „Richtung“ und „gerade“ sind also ungezwungen nur zu erklären mit Zuhilfenahme des Kraftbegriffs, ohne ihn behalten jene wichtigen Grundbegriffe immer etwas Dunkles.“ — Die Entwicklung der Haupteigenschaften sei bei dieser Definitton leicht.

nicht der Fall ist, sondern dafs, wenn ein Punkt gegeben ist, nach einer bestimmten Richtung unendlich viele Punkte möglich sind und ebenso in einem bestimmten Abstand unendlich viele Punkte. Zu der Bestimmung eines bestimmten Punktes sind sowohl eine bestimmte Richtung als auch ein bestimmter Abstand nötig. Wir haben es also sofort mit einer zweifachen Wesenheit in doppelter Beziehung zu thun. Erstens treten die Begriffe Richtung und Abstand gleichzeitig in Evidenz, zweitens ist aber auch jeder von diesen wiederum in doppelter Hinsicht zu betrachten. Dafs die beiden Abstände einander gleich und dafs wir infolge dessen schlechtweg vom Abstande sprechen, thut der angestellten Betrachtung keinen Eintrag; übrigens wird das Axiom der Umkehrbarkeit, das sofort in dieser Grundbetrachtung zu Tage tritt, als solches von vielen Seiten bestritten.[1]) Hier möge zur Erläuterung der vorgetragenen Meinung noch ein Beispiel seine Stelle finden, das erst später ausführlich behandelt werden soll. Betrachten wir den Winkel, so tritt auch bei diesem Begriff diese doppelte Wesenheit der Richtung und des Abstandes hervor. Die beiden Richtungen gehen hier von einem gemeinsamen Punkt aus, dagegen ist der Drehungsweg — es sei gestattet, diesen kurzen Ausdruck anzuwenden — ein doppelter je nach dem Sinn der Drehung und im allgemeinen auch ein der Gröfse nach doppelter. Doch kehren wir zu der Betrachtung der Geraden zurück. Fafst man die Gesamtheit aller Punkte, die von einem Punkte aus nach derselben Richtung hin liegen, zusammen, so hat man als den Träger dieser Punktreihe den Strahl, fafst man die Punkte zusammen, die vom gegebenen Punkte aus denselben

---

[1]) „Die nicht-euklidische Geometrie nämlich, deren kritischen Leistungen auch der konservativste Geometer seinen Beifall nicht versagen sollte, hat dadurch ein neues bedeutsames Ferment in die Erörterung gebracht, dafs sie die Eigenschaft der Umkehrbarkeit für Ebene und gerade Linie betont. Man mag diese beiden Grundgebilde wie immer aus dem Raumbegriff selbst oder, wie es die verbesserte Methode der Neueren will, aus Kugel und Kreis herleiten, stets erheben sich die allergröfsten Schwierigkeiten bei dem Versuch, zu beweisen, dafs eine mit ungewechselten Endpunkten neben die erste gelegte Strecke durchaus mit jener identisch, also umkehrbar sei.“ Günther, Der Thibautsche Beweis. p. 5.

Abstand haben, so ergiebt sich als Träger dieser Punktreihe der Kreis. Wir haben somit im Strahl und Kreis die beiden aus den Grundbegriffen Richtung und Abstand sich unmittelbar ergebenden Grundgebilde der elementaren Planimetrie.[1]) Betrachtet man den Strahl nun auch auf die Eigenschaft hin, dafs er auch die Richtung vom zweiten Punkte aus nach dem ersten hin enthält und dafs wir vom zweiten Punkte aus wieder nach dieser Richtung hin alle Punkte uns denken können, auch über den ersten hinaus, so ergiebt sich als das Zusammenfassende dieser beiden Strahlen oder entgegengesetzten Richtungen die Gerade als unmittelbarer Grundbegriff a priori, wie ich sie bezeichnen möchte, da sie zu ihrer Erklärung nur Begriffe a priori erfordert, doch aber erst sekundär aus der Betrachtung des Strahles resultiert. Ebenso kommt auch der zweite Grundbegriff a priori in der Geraden zum Ausdruck, da auf ihr der Abstand der Punkte gemessen wird. Indem wir also so die Gerade in qualitativer und quantitativer Hinsicht betrachten und qualitativ auf den Begriff der Richtung, quantitativ auf den Begriff des Abstandes stützen, erscheint sie uns zwar gegenüber den primären Gebilden Strahl und Kreis als ein sekundärer Begriff, immerhin aber doch so eng damit verbunden, dafs wir sie als einen mittelbaren Grundbegriff a priori bezeichnen dürfen.

Für die Auffassung des Strahles als des primären Ge-

---

[1]) Rausenberger a. a. O. Einleitung:

„Suchen wir uns darüber klar zu werden, welche Schwierigkeiten sich einer einheitlichen Entwicklung der Elementargeometrie entgegenstellen. Zunächst wird ein weitgehender Dualismus hervorgerufen durch die Benutzung zweier Fundamentallinien: der Geraden und des Kreises. Die neuere synthetische Geometrie zeigt, dafs durch geeignete Zuordnung von Punkte und Geradensystemen sämtliche Kegelschnitte erzeugt werden können; unter diesen ist der Kreis ein ganz spezielles Gebilde. Trotzdem räumt man ihm den Vorzug vor den übrigen Kegelschnitten ein, in die Elementargeometrie aufgenommen und hier gewissermafsen als gleichwertig mit der Geraden behandelt zu werden." — Rausenberger begründet dann ausführlich, warum auch er für Beibehaltung des Kreises in der Elementargeometrie ist. Meiner Meinung nach zeigt sich der hier berührte Dualismus nicht blofs bei der Geraden und dem Kreise, sondern auch bei der Geraden allein, da sie qualitativ und quantitativ zu erklären ist.

bildes scheint mir übrigens auch der Umstand zu sprechen, der von vielen Autoren bei der Definition der Geraden benutzt wird: dafs nämlich der im homogenen Medium verlaufende Lichtstrahl als Beispiel für die Gerade angeführt wird.

Dafs sich bei der Zugrundelegung der Begriffe Richtung und Abstand übrigens ungezwungen Gerade (resp. Strahl) und Kreis, die beiden Linienarten der elementaren Planimetrie, in analoger Auffassung ergeben und folglich der Kreis nicht als ein zweites dem ersten Gebilde unvermittelt gegenüberstehendes Gebilde eingeführt werden mufs, läfst mich diese Betrachtungsweise für eine besonders berechtigte halten.[1])

Wie in der Geraden eine doppelte Richtung gegeben ist, so auch im Kreise; bei der ersteren handelt es sich dabei um fortschreitende Bewegung, bei dem Kreise um drehende Bewegung, so dafs auch in dieser Beziehung eine Analogie zwischen den beiden Grundgebilden besteht.

Setzen wir zwei Punkte, so ist dadurch sofort auch die Richtung vom einen zum andern und ihr Abstand vorhanden, nicht aber die Gerade: diese müssen wir uns erst durch die beiden Punkte gelegt denken;[2]) also auch ohne dafs die Ge-

---

[1]) Vergl. die vorhergehende Anmerkung.

[2]) Vergl. Hoffmann, Die Prinzipien des 1. Buches von Euklids Elementen, in H. Z. III. p. 119.

Nachdem sich Hoffmann sehr scharf über Euklids Definition geäufsert, sagt er: „Der Begriff der geraden Linie wird durch eine Definition im gewöhnlichen Sinne des Wortes nicht klar, da diese nur eine Zusammenfassung von Merkmalen erfordert. Vielmehr verlangt die Definition der Geraden einen Akt psychischer Bewegung, nämlich die Bewegung eines Punktes oder Atombildes zwischen zwei idealen Raumpunkten in unserer Vorstellung. Da diese Bewegung aber mit unmefsbarer Geschwindigkeit geschieht, so wird der Geist dieser Thätigkeit sich nicht mehr bewufst.“ — Diese Ansicht teilt auch J. Kober in H. Z. III. p. 586: „Gerade und Richtung sind innig verwandte Begriffe, wie ja schon in der Sprache angedeutet ist; „Richtung“ kommt her von „recht“, sowie directio mit rectus zusammenhängt. Darin ist ausgesprochen, dafs man notwendig bei dem Begriffe „gerade“ ebenso wie bei „Richtung“ an eine Bewegung denkt, dafs es eine gewaltsame Abstraktion ist, wenn man bei dem Begriffe der geraden Linie die „Bewegung oder andere Thätigkeit“ ausschliefst; diese Abstraktion ist zwar begründet, rechtfertigt aber kein neues Wort.“

rade gedacht wird, die durch die beiden Punkte bestimmt ist, und ganz unabhängig von ihrer Existenz sind Richtung und Abstand a priori mit den beiden Punkten gegeben. Dies scheint mir ganz besonders den sekundären Charakter der Geraden gegenüber den primären Begriffen Richtung und Abstand zu bestimmen. Umgekehrt können wir uns die Gerade aber nicht etwa denken, ohne dafs Richtung und Abstand als vorhanden angesehen werden.

Dafs die Gerade durch zwei Punkte vollkommen bestimmt ist, oder dafs alle Geraden durch zwei Punkte gedacht zusammenfallen, geht unmittelbar daraus hervor, dafs die Richtung und der Abstand durch zwei Punkte — Ausgangspunkt und Zielpunkt — bestimmt sind. Setzen wir an Stelle des Zielpunktes die Richtung nach ihm von einem Punkt aus, so ergiebt sich, dafs auch durch einen Punkt und eine Richtung eine Gerade qualitativ bestimmt ist, während durch die Richtung allein dies nicht der Fall ist, denn es giebt unendlich viele Gerade, die gleiche Richtung[1]) haben, aber von verschiedenen Punkten ausgehen, wie es unendlich viele Geraden giebt, die zwar von einem Punkt ausgehen, aber nach verschiedenen Richtungen. So sehen wir, dafs zwar die Gerade in gewisser Hinsicht mit dem Begriff der Richtung identisch ist, aber nicht völlig, sondern dafs zur völligen Bestimmtheit der Geraden noch ein bestimmter Punkt, der Ausgangspunkt, gegeben sein mufs: Richtung und Gerade sind daher nicht als identische Begriffe aufzufassen, zumal da in der Geraden ja auch noch die entgegengesetzte Richtung auftritt.

Es sei gestattet auf den Grundbegriff Richtung noch etwas näher einzugehen, obwohl wir uns noch bei der Besprechung des Parallelenaxioms ausführlich mit ihm zu beschäftigen

[1]) Man vergleiche die weiter unten folgenden Betrachtungen über den Ausdruck „gleiche Richtung haben". Hier ist der Ausdruck im gewöhnlichen Sprachgebrauch aufzufassen. Es sind also unter den hier bezeichneten Geraden parallele Gerade zu verstehen. (Um Mifsverständnissen vorzubeugen, die sich etwa wegen der vorhergehenden Ausführungen einstellen könnten, sei ausdrücklich bemerkt, dafs nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch unter keinen Umständen unter Geraden, die gleiche Richtung haben, solche Gerade verstanden werden dürfen, die dasselbe Ziel haben.)

haben werden[1]) und auch dort erst ihn in seiner vollen Verwendbarkeit bei der Betrachtung mehrerer Geraden in ihrer gegenseitigen Lage kennen lernen werden, ebenso wie dort auch der Begriff Abstand noch eine weitere Anwendung finden wird. Die Ausdrücke „in der Richtung von einem Orte herkommen, in der Richtung auf einen Ort zugehen“ sind für niemand unklar und es ist nur ein volkstümlicher Pleonasmus, wenn gesagt wird „in gerader Richtung auf etwas zugehen“, denn in diesem Falle, da ein Ausgangspunkt da ist, ist die Gerade durch die Richtung völlig bestimmt, Gerade und Richtung identisch.

Es ist hier wohl auch der Ort, auf einige Betrachtungen einzugehen, die sich an den Begriff der Richtung anknüpfen, und die auf eine mifsbräuchliche Anwendung des Begriffes Richtung, die sich unbegreiflicherweise auch in mathematischen Lehrbüchern findet, sich beziehen.[2]) Dabei sollen die oben schon gebrauchten Beispiele aus dem gewöhnlichen Sprachgebrauch beibehalten werden. Der Leser wird sie leicht in die mathematische Sprache übersetzen können, und sie werden dadurch nichts an ihrer Verwendbarkeit einbüfsen.

Gehen zwei Personen von verschiedenen Orten auf einunddenselben Ort zu, so haben sie dasselbe Ziel, aber im allgemeinen nicht dieselbe Richtung; es ist wichtig dieses Fehlers zu gedenken, denn er ist — wie ich schon erwähnt — in der That gemacht worden.[3]) Nur wenn der von dem Ziel weiter

---

[1]) Dort werde ich auch auf die ausführlichen Auseinandersetzungen, die Hoffmann in seinem Artikel „Studien über geometrische Grundbegriffe“ dem Begriff der Richtung widmet, genauer zurückkommen. Hier sei nur auf diesen Artikel ausdrücklich hingewiesen. H. Z. III. 443/452. 523/34.

[2]) Vergleiche die folgende Anmerkung.

[3]) Man vergleiche: Bolze, Über Parallellinien in H. Z. II. p. 335: „Dem deutschen Sprachgebrauche ist folgender Satz vollkommen angemessen: „Mein Freund wird von Stettin, ich werde von Cottbus nach Berlin reisen; wir haben ja dieselbe Richtung.“ Mit Recht macht J. Kober in H. Z. III. p. 535 auf die Inkorrektheit dieses Satzes aufmerksam und weist sie nachdrücklich zurück. — Auch Hoffmann hat sich in H. Z. XVI. p. 339 „über die fast unglaubliche Verwechselung von Richtung und Ziel“ und ebenso in H. Z. XXI. p. 252 sehr scharf aus-

entfernte auf seinem Wege, indem er in der Richtung auf das Ziel geht oder gerades Weges auf das Ziel zugeht, durch den Ausgangspunkt des andern kommt, haben beide Personen dieselbe Richtung oder gleiche Richtung.

Auch auf diese letztere Identität ausdrücklich hinzuweisen, erscheint mir nicht unwesentlich. Denn fast durchweg wird z. B. von parallelen Geraden gesagt, dafs sie gleiche Richtung haben — d. h. aber nach dem allgemeinen Sprachgebrauch identische Richtung.[1]) Dieser Ausdruck ist also nicht nur ungenau, sondern aus dem angeführten Grunde geradezu falsch. Auch in diesem Falle scheint die Verwechselung mit dem gleichen Ziel (dem unendlich fernen Punkt) Veranlassung gegeben zu haben, diesen sprachlichen Fehler zu begehen. Nach meiner Ansicht müfste man sich hier des genaueren Ausdrucks „ähnliche Richtungen" bedienen, während es sich, wenn von Geraden gleicher (d. h. identischer) Richtung die Rede ist, durchaus um zusammenfallende Gerade handelt.

Auch die Ausdrücke „eine Gerade ändert ihre Richtung", „einer Geraden eine andere Richtung geben", „sie in eine andere Richtung bringen" sind falsch und daher entschieden zu verwerfen, da sie zudem geeignet sind, die Vorstellungen über Gerade und Richtung zu verwirren. Es wird sich vielmehr empfehlen, einen Ausdruck zu gebrauchen, wie „eine zweite Gerade von demselben Punkte aus aber in anderer Richtung annehmen." Dadurch wird zugleich auch der fehlerhafte Gedanke vermieden, als wenn die räumlichen Gebilde überhaupt bewegt werden könnten.

Es mögen hier noch einige Betrachtungen ihre Stelle finden, die auf die Analogie von Gerade und Kreis hinweisen.

Nimmt man einen Punkt an, so giebt es unendlich viele Strahlen, die von ihm ausgehen, entsprechend den unendlich vielen Richtungen; ebenso giebt es unendlich viele Kreise, die den Punkt zum Mittelpunkt haben, entsprechend den unendlich

---

gesprochen. (Auf XIX. p. 353 wird verwiesen.) Vergl. auch H. Z. X. p. 416.

[1]) Auch auf diese Frage werde ich gelegentlich der Besprechung des Parallelenaxioms zurückkommen. Man vergleiche **Hoffmann**, Studien über geometrische Grundbegriffe a. a. O. und H. Z. IV. p. 111.

vielen möglichen Abständen. Kommt ein zweiter Punkt hinzu, so ist ein bestimmter Strahl dadurch charakterisiert, wenn wir auf die Richtung achten, ein bestimmter Kreis, wenn der Abstand das Merkmal ist. Fassen wir dagegen in anderer Weise die zwei gegebenen Punkte als Bestimmungsstücke auf, so ergiebt sich: der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände haben, ist eine Gerade. Im ersteren Falle liegen die bestimmenden Punkte auf dem Strahl, im zweiten aber nicht auf der Geraden. Während es bei einem festen Punkte unendlich viele zugehörige Kreise giebt, ist durch zwei Punkte eine einzige Gerade bestimmt; solcher Punktpaare, durch die ein und dieselbe Gerade bestimmt wird, giebt es aber unendlich viele. Ähnliche Betrachtungen lassen sich noch in reichem Maſse anstellen, sie werden im Unterricht mit Vorteil verwendet werden können, um von vornherein die beiden Elementargebilde Strahl und Kreis in nahe Beziehung zu setzen. Es wird später noch einmal darauf zurückgekommen werden.

Es folgen nun die Zitate:

August (Berlin 1852): „Wenn der in Bewegung gedachte Punkt seine Richtung nie ändert, so entsteht eine gerade Linie.“[1])

Diese Definition ist zwar genetisch, aber sie definiert nicht den Begriff der Geraden, sondern den Strahl, auſserdem ist sie unvollständig; mit demselben Rechte lieſse sich die Definition aufstellen: „Bewegt sich ein Punkt auf seinem Abstand von einem zweiten Punkte (auf der kürzesten Linie), so beschreibt er eine Gerade.“ Es ist merkwürdig, daſs gerade der eine Grundbegriff der Richtung immer zu der Definition der Geraden benutzt ist, während doch mit demselben Rechte der Begriff des Abstandes zu Grunde gelegt werden könnte.

Seiner Definition fügt August dann vier Grundsätze hinzu:

1) Zwischen zwei Punkten im Raume ist nur eine gerade Linie denkbar.

---

[1]) J. Kober, Über die Definitionen in H. Z. I. p. 232: „Was heiſst Richtung? Liegt nicht in dem Worte „Richtung“ (vergl. rectus) der Begriff „gerade“? Es ist also wiederum nur durch ein anderes Wort die Tautologie verhüllt.“

2) Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Die Länge einer geraden Linie zwischen zwei Punkten bestimmt daher die Entfernung dieser Punkte.[1])

3) Eine gerade Linie, die zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat, liegt ganz in derselben.

4) Zwei verschiedene gerade Linien können sich nur in einem Punkte durchschneiden. (Vergl. Grundsatz I.)

Baltzer, Elemente. — Leipzig 1874.

„Die einfachste unter den Linien ist die Gerade, welche eine von einem Punkt ausgehende Richtung (und die entgegengesetzte)[2]) angiebt und nach dieser Richtung unbegrenzt sich weiter erstreckt."

„Wenn zwei Gerade zwei Punkte gemein haben, so decken sie sich (Axiom von der Geraden);[3]) eine Gerade ist also durch zwei Punkte bestimmt."

„Der Begriff der Geraden ist vermöge seiner Einfachheit nicht definierbar, Richtung ohne die Gerade unverständlich.[4]) Die alte Definition (Eukl. I.) 'eine gerade Linie ist diejenige Linie, welche zwischen ihren Punkten gleichmäfsig (ἐξ ἴσου) liegt' ist an sich dunkel und gewinnt erst Klarheit durch das Axiom 'zwei Gerade schliefsen keinen Raum ein', nach welchem behauptet wird, dafs zwei Gerade sich decken, wenn sie zwei Punkte gemein haben, und dafs eine Gerade ihre Lage nicht ändern kann, wenn sie in zwei Punkten festgehalten ist.[5])

---

[1]) Mit Recht ist von einer Seite gegen diese Fassung des Grundsatzes geltend gemacht worden, dafs durch den Ausdruck „die kürzeste" eine Vergleichung mit allen möglichen Linien, die durch zwei Punkte gehen können, angedeutet werde, dafs also zur Definition der Geraden man aller anderen Linien bedürfe.

[2]) Das ist eben etwas, was erst sekundär hinzukommt; von vornherein handelt es sich hier nur um eine Richtung und wir müssen daher vom Strahl ausgehen.

[3]) S. meine obigen Ausführungen.

[4]) Das ist nicht richtig. Die Richtung existiert unabhängig von der Geraden. Eine Richtung ohne Gerade wohl denkbar; bei der Geraden denkt man ja auch zwei (entgegengesetzte) Richtungen.

[5]) Auch eine drehende Bewegung ist nicht mehr möglich bei zwei

Der alte Satz: 'Eine Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten' ist auch als Definition vorangestellt worden."

Bartholomäi, Zehn phil. Vorlesungen. — Jena 1860.

„Und wenn die Intelligenz ihre Zahlenreihe durchmustert, so findet sie in derselben ein Vorwärtsschreiten; sie geht von der 1 zur 2, von der 2 zur 3 u. s. w. unaufhaltsam vorwärts. Dabei ist die $(n+1)$te Zahl durch die $n$te von der $(n-1)$ten getrennt, n ist zwischen $(n-1)$ und $(n+1)$; $(n-1)$ ist aufser $(n+1)$, und von $(n-1)$ führt das Vorstellen nach $(n+1)$ nur über n. Das sind aber nichts weiter als Raumvorstellungen, das Aufsereinander und die gerade Linie.[1]) Also das blofse Zählen würde notwendig die räumlichen Vorstellungen der Distanz und der Richtung erzeugen."

Beck (Legendre). — Bern 1842.

Erkl.: „Eine gerade Linie ist der kürzeste Weg von einem Punkte zu einem andern."[2])

Grundsatz: „Von einem Punkte zu einem andern kann nur eine gerade Linie gezogen werden."

Becker, J. K., Elemente a. n. Grundlage.[3]) — Berlin 1877.

---

festen Punkten, was gegenüber der öfter vorkommenden falschen Meinung hier ausdrücklich hervorgehoben werden möge.

[1]) Bartholomäi identifiziert also vollständig ohne weitere Auseinandersetzung, ohne jeden Skrupel Gerade und Richtung, denn der Begriff der Distanz wird ohne jede Verknüpfung in die Erklärung hineingezogen.

[2]) Hier haben wir also in der That die oben (s. August) angedeutete Definition der Geraden aus dem Begriff des Abstandes, allerdings in der gerügten Fassung der kürzesten Linie. Vergl. die Anmerkung zu Baltzer und zu Legendre.

[3]) Man vergleiche J. K. Becker, Zu dem Kapitel von den Inkorrektheiten, in H. Z. II. p. 94: „Die Gerade ist, wie jede andere Linie, durchaus nichts als die Grenze einer Fläche"; sie könne aber auch selbständig gefafst werden. Jedem Raumgebilde komme aufser Gestalt und Gröfse

Es wird unterschieden zwischen der durch Anschauung gelehrten Form, d. h. Qualität der Ausdehnung und der Gröfse oder Quantität der Ausdehnung. Dann wird gezeigt, dafs es notwendig zwischen zwei getrennten Punkten eine kürzeste Linie giebt. Nachdem noch eine Reihe von Axiomen und Lehrsätzen aufgestellt ist, folgt der Lehrsatz:

„Der Ort aller Punkte, deren Lage durch ihre Distanz von zwei festen Punkten bestimmt ist, ist eine Linie, die alle ihre Punkte auf kürzestem Wege verbindet.“

„Diese Linie heifst gerade Linie oder Gerade.“

„Ein durch zwei Punkte begrenzter Teil einer Geraden heifst eine geradlinige Strecke, und diese ist das Mafs für die Distanz ihrer Endpunkte.“ — Es folgt:

Lehrsatz: „Zwei beliebige Punkte des Raumes können nur durch eine einzige Linie von kürzester Länge verbunden werden und diese ist die sie verbindende geradlinige Strecke.“

Hieran schliefsen sich noch folgende Sätze:

„1) Zwei gerade Linien fallen ganz zusammen, wenn sie zwei Punkte gemein haben.

2) Verschiedene Gerade können höchstens einen gemeinschaftlichen Punkt haben.

3) Geradlinige Strecken sind kongruent, wenn die Endpunkte der einen dieselbe Distanz haben wie die der anderen.

4) Drei Punkte liegen immer und nur dann in gerader Linie, wenn die Distanz zweier gleich ist der Summe oder Differenz ihrer Distanzen vom dritten.

5) Die Distanz der Endpunkte einer geradlinigen Strecke ist proportional ihrer Länge.

6) Ein Punkt, der sich auf einer geraden Linie immer

---

auch das Merkmal der Stellung zu. „Dieses wesentliche Merkmal der Geraden findet man nun in den meisten Lehrbüchern der Geometrie zum grofsen Nachteil der Anschaulichkeit gar nicht erwähnt. Wo er in der Planimetrie auftritt, ist er meistens durch das gänzlich unpassende Wort Richtung ausgedrückt.“ Zwischen diesen beiden Begriffen sei scharf zu unterscheiden. „Auf jeder Geraden von bestimmter Stellung kann ein Punkt sich nach zwei entgegengesetzten Richtungen bewegen, und diese ändern sich, sobald die Linie ihre Stellung ändert, sind aber darum keineswegs mit ihr identisch.“

nach derselben Seite[1]) hin fortbewegt, entfernt sich von seiner Anfangslage über alle Grenzen, ohne sich ihr jemals wieder zu nähern.

7) Jeder Teil einer Geraden kann auf derselben oder auf einer anderen Geraden so fortgerückt werden, dafs er immer ganz in derselben liegt.

8) Wird eine Gerade gezwungen, durch zwei feste Punkte zu gehen, so kann sie nur noch in sich selbst bewegt werden, d. h. so, dafs zwar alle Punkte fortschreiten, aber immer in dem von der Geraden ursprünglich eingenommenen Orte verbleiben. Werden zwei ihrer Punkte festgehalten, so kann sie ihre Lage nicht mehr ändern.

9) Eine geradlinige Strecke kann auf doppelte Art so gelegt werden, dafs sie dieselben Punkte verbindet und in ihrer Gesamtheit dieselbe Stelle einnimmt."

Becker, J. K., Lehrbuch der Elementar-Mathematik. II. 1. — Berlin 1877.

„Sieht man von einem Punkte aus nach einem andern Punkte, so sieht man ihn in einer bestimmten Richtung (nach rechts u. s. w.) und man sagt, der beobachtete Punkt liege von dem Punkte aus, von dem man ihn sieht, in dieser Richtung."

„Sieht man dagegen von dem beobachteten Punkte aus nach dem Punkte zurück, von welchem man ihn beobachtet hatte, so sieht man nach der entgegengesetzten Richtung."

„Alle Punkte, welche von einem bestimmten Punkte aus in einer bestimmten Richtung oder in der dieser entgegengesetzten liegen, befinden sich mit demselben auf einer nach beiden Seiten unbegrenzten Linie, welche gerade Linie oder Gerade heifst."

„Durch zwei Punkte kann nur eine Gerade gehen, also auch nur eine Strecke begrenzt werden. Diese ist kürzer, wie jede andere Linie zwischen denselben Endpunkten." (Axiom.)

---

[1]) Ich würde den Ausdruck „nach derselben Richtung hin" vorgezogen haben, obwohl hier ja ein Mifsverständnis fast ausgeschlossen ist.

Behl, — vergl. August.

Fabian[1]) knüpft die Betrachtung der Linien an die Betrachtung von Drahtmodellen,[2]) diskutiert genau die Beobachtungen, die man anstellen kann, wenn sich das Drahtstück um zwei festgehaltene Punkte dreht und sagt zum Schlufs: „Die wenigsten Merkmale würde nun die Gestalt eines Drahtes bieten, dessen sämtliche Punkte in gleicher Weise sich verhielten, also nach Art der Endpunkte sich gar nicht von ihrer Anfangslage entfernten. Einen solchen Draht, der sich durch die gröfstmögliche Einfachheit der Gestalt auszeichnet, werden wir einen geraden oder geradlinigen nennen.“[3])

[1]) Wird kein Titel angegeben, so sind die Werke gemeint, aus denen schon in früheren Kapiteln zitiert worden ist. Nur da, wo mehrere Werke desselben Verfassers zitiert werden, schien es notwendig, den Titel wieder anzuführen.

[2]) Sickenberger sagt in seiner Rezension H. Z. VII. p. 297:

„Endlich aber habe ich auszusetzen, dafs der Herr Verfasser seinen Grundsatz, nur stufenweise zur Abstraktion vorzuschreiten, an mehreren Stellen verleugnet. Ich nenne als Beispiel die Entwicklung des Begriffes der geraden Linie . . . .“ So sehr gerade diese beiden Entwicklungen sich durch Klarheit und Eleganz auszeichnen, so möchte ich doch einem umgekehrten Verfahren den Vorzug erteilen. Ich glaube z. B. durchaus nicht, dafs das Messen krummer Linien, welches der Verfasser durch succesives Aufeinanderlegen der Punkte („ohne Gleitung“) bewirkt, primärer ist als das Messen geradliniger Strecken, von einigen Bedenken gegen die wissenschaftliche Strenge dieser Messungstheorie abgesehen.“ Im übrigen wird das Buch sehr gelobt.

[3]) Vergl. J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe, in H. Z. I, p. 231:

„Diese Definitionen sind nur Verbesserungen der Euklidischen. Es gelten also über sie im ganzen dieselben Bemerkungen. Aber noch mehr! Dem Anfänger dürfte schwerlich einleuchten, dafs die Gerade überhaupt in zwei Punkten festgehalten werden mufs, um ihre Lage zu behaupten, da schon ein bedeutendes Abstraktionsvermögen dazu gehört, um zu begreifen, dafs ein Körper (oder Linie) sich frei drehen kann, wenn er in einem Punkte festgehalten wird. Wer dieses Vermögen besitzt, ist längst über den Begriff der geraden Linie im Reinen.

Wie kann man überhaupt den so einfachen Begriff der geraden Linie durch einen so viel komplizierteren, wie der der Drehung um zwei Punkte ist, erklären wollen.“

Kober spricht darin ganz meine Ansicht aus, wie aus verschiedenen meiner Anmerkungen hervorgeht. Man wolle sich da, wo diese Drehungserklärung vorkommt, dieses Zitat ins Gedächtnis zurückrufen.

Es knüpfen sich daran noch eine Anzahl von Beobachtungen, die zu den Axiomen der geraden Linie führen.

Féaux — Paderborn 1882 — giebt die gewöhnliche genetische Definition und fügt hinzu: „Da nun das Beibehalten einer einmal angenommenen Richtung sich nur auf eine Art bewerkstelligen läfst, das Ändern der Richtung dagegen auf unzählige verschiedene Weisen geschehen kann, so erhellt, dafs es nur eine Art von geraden ... Linien giebt."

Gaufs.

„Die Linie, in welcher alle Punkte liegen, die bei Drehung eines Körpers (eines Teiles des Raums) unter Festhaltung zweier Punkte derselben ihre Lage unverändert beibehalten, heifst eine Gerade (gerade Linie)."[1])

„...; es giebt nur eine Gerade, welche zwei bestimmte Punkte enthält."[2])

Heger, Leitfaden. — Breslau 1882.

„Ein Körper, von welchem zwei Punkte A und B festgehalten werden, kann sich noch bewegen."

„Die Punkte einer Linie des Körpers ändern bei dieser Bewegung ihre Lage nicht. Diese Linie ist durch die beiden festgehaltenen Punkte bestimmt. Man nennt diese Linie gerade Linie."[3])

---

[1]) Gerade diese Erklärung der Geraden hat in neuerer Zeit sich, wie es scheint, viele Freunde erworben. Und doch möchte ich behaupten, dafs gerade bei dieser Erklärung der Begriff der Geraden vorausgesetzt ist, wenn auch unbewufst; auch die Eigenschaft der Geraden durch zwei Punkte bestimmt zu sein liegt bei dieser Definition schon zu Grunde. Es ist ein circulus.

[2]) Auch das ist genau genommen nicht richtig; es giebt unendlich viele Gerade, welche zwei bestimmte Punkte enthalten, aber sie fallen vollständig zusammen, sind identisch. Daher die Möglichkeit überhaupt des Aufeinanderlegens von Figuren.

[3]) Wie ich schon an andrer Stelle bemerkt habe, liegt nach meiner Ansicht bei dieser Erklärung der Begriff der Geraden zu Grunde. Man könnte daher umgekehrt die Gerade dazu benutzen, um zu zeigen, welche

Hieran schliefsen sich noch einige Betrachtungen über die Eigenschaften der Geraden und die Kombination von zwei Geraden.

Heinze, Elem.-geom. — Berlin 1877.

„Sind zwei Punkte gegeben, so ist die Zusammenfassung aller Punkte, die von dem einen aus vor dem andern liegen, die geometrische gerade Linie.“[1])

Es folgen noch eine ganze Reihe von Bemerkungen, die recht wohl geeignet sind, den Begriff der Geraden und ihre Eigenschaften zu verdeutlichen resp. dieselben aus der Anschauung zu entwickeln.

Henrici und Treutlein. — Leipzig 1881.

„Die einfachste unter allen Linien ist die gerade Linie oder Gerade.“[2])

„Axiom der Geraden: Durch zwei Punkte geht immer eine, aber nur eine einzige Gerade, oder: Wenn zwei Gerade zwei Punkte miteinander gemeinsam haben, so fallen sie in eine einzige zusammen d. h. sie decken einander in allen ihren Punkten.“[3])

„Wählt man auf einer Geraden einen Punkt A als Ausgang, einen andern B als Ziel der Bewegung, so wird durch diese fortschreitende Bewegung eine Richtung bestimmt, und nur im Gedenken an diese Bewegung eines Punktes spricht man auch von der Richtung einer Geraden.“

Hoch, a. a. O.

„Ein Punkt hat bei dem Beginn seiner Bewegung die

Punkte bei der Drehung ihre Lage nicht ändern. Übrigens ist gerade bei dieser Definition die Gefahr sehr grofs, an Stelle der Geraden sich einen sehr dünnen langen Körper zu denken.

[1]) Diese Definition ist identisch mit derjenigen, die aussagt, dafs man die Gerade in eine solche Lage bringen kann, dafs sie als Punkt erscheint. Beide gehen, wenn auch unausgesprochen, auf den Lichtstrahl als das gemeinsame zurück.

[2]) Man vergleiche die an früherer Stelle (Kapitel IV) über den Begriff der Einfachheit aufgestellten Betrachtungen.

[3]) Die zweite Fassung verdient als die präzisere den Vorzug.

Auswahl unter einer unendlichen Menge von Bewegungen. Das die unendlich vielen Bewegungen Unterscheidende heifst Richtung.[1]) Die entgegengesetzte Richtung ist jene, welche angiebt, wie man von dem bei der Bewegung erreichten Punkt wieder zurückkommen könnte zum Ausgangspunkte."

„Von der entgegengesetzten Richtung wohl zu unterscheiden ist die Bedeutung der verschiedenen Richtung."

„Alle Punkte, welche in einer bestimmten Richtung oder in der entgegengesetzten liegen, liegen in einer geraden Linie oder Geraden. Eine Gerade ist demnach jene Linie, welche, in zwei Punkten festgehalten, ihre Lage nicht ändern kann. (Staudt, Geometrie der Lage.)"

Hoffmann, Vorschule. — Halle 1874.

„Sie (die Gerade) hat drei wesentliche Eigenschaften: Länge, Lage, Richtung."

Alle drei Eigenschaften werden ausführlich besprochen und durch eine grofse Reihe gut gewählter Beispiele veranschaulicht. Der die Richtung behandelnde Paragraph wird eingeleitet durch den Satz:

„Während jeder Geraden nur eine Länge und nur eine Lage zukommt, hat sie dagegen zwei Richtungen."[2])

„Der bewegte Punkt strebt während der Bewegung einem Ziel zu, und hat dieses Ziel sozusagen stets im Auge. Dieses Streben und Festhalten (Fixieren) des Ziels, dieses unverwandte Hinsehen aufs Ziel heifst Richtung."[3])

„Die Gerade behält in sich immer ihre Richtung.

Junghans, Lehrbuch der elementaren Geometrie. — Berlin 1879. — giebt die Euklidsche und daneben auch die genetische Definition. Dann stellt er die beiden Grundsätze auf:

---

[1]) Dieser Ausdruck ist zum mindesten nicht sehr glücklich gewählt.

[2]) Vergl. Hoch. Es wäre wohl auch hier nicht unpassend gewesen, diese beiden Richtungen als entgegengesetzte zu bezeichnen. Auch der Ausdruck „die Gerade hat zwei Richtungen" ist kein glücklicher.

[3]) Vergl. die obigen Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

„1) Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.“

„2) Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.“

Kober, Leitfaden. — Leipzig 1874.

„Der Begriff der geraden Linie und der Richtung,[1]) (sowie die nahe verwandte Ebene) gestatten wegen ihrer Einfachheit keine völlig befriedigende Definition.“

„Ein bewegter Punkt beschreibt eine gerade Linie, wenn er die anfängliche Richtung beibehält.“

Köstler, Leitfaden der ebenen Geometrie I. — Halle 1889. — (vergl. auch dessen Vorschule) geht von dem Grundsatz aus (nachdem er die genetische Definition gegeben): „Die gerade Linie ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte,“ ein Grundsatz, der nach ihm von Archimedes herrührt.

Kommerell, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Tübingen 1882. — giebt den Begriff der Geraden aus der Betrachtung der Drehung und fügt dann hinzu: „Eine Gerade giebt eine und nur eine Richtung an.“[2])

Kries, L. d. r. M. — Jena 1817.

„Die Vorstellung der geraden Linie gründet sich unmittelbar auf die Vorstellung der Ausdehnung[3]) und kann daher

---

[1]) „Man denke bei dem Worte Richtung an die Himmelsgegenden; doch ist zu beachten, daſs der Begriff „Richtung“ mit dem Begriff „gerade“ zusammenfällt.“ Wie oben gezeigt ist, handelt es sich aber hier nicht um eine völlige Identität, so daſs also in dieser Bemerkung zu viel gesagt ist: ein Zusammenfallen der beiden Begriffe ist in der That nicht richtig.

[2]) Dies ist entschieden nicht richtig, denn in der Geraden sind zwei Richtungen, die ursprüngliche und die ihr entgegengesetzte, enthalten.

[3]) Dies ist mir nicht völlig klar: soll mit der Ausdehnung die Richtung gemeint sein oder enthält dieser Satz das Axiom unseres Weltenraumes, das aussagt, daſs er ein ebener Raum ist.

nicht weiter erklärt werden. Alle Erklärungen, die man von ihr giebt, schliefsen entweder schon den Begriff der geraden Linie in sich oder setzen ihn in der That voraus. Es ist daher auch nur eine einzige Art gerader Linien möglich."

„Eine gerade Linie unterscheidet sich von den andern nur durch ihre Gröfse.[1]) Sie ist daher auch durch ihre Gröfse bestimmt. Andere Eigenschaften bietet sie, für sich allein und ohne weitere Bedingungen betrachtet, nicht zur Untersuchung dar."

Kruse, Elemente der Geometrie I. — Berlin 1875. — fügt seiner Erklärung der Geraden, die sich auf die Drehung stützt,[2]) hinzu:

„Diese Begriffsbestimmung rührt nach G. W. Krafft (Institut. geom. subl. Tub. 1753. p. 2) von F. C. Maier her; nur dafs dieser die Endpunkte als feste Punkte annahm. Vergl.

---

[1]) Hier handelt es sich um die ungenaue Ausdrucksweise früherer Zeit, da man gerade Linie und Strecke noch nicht zu unterscheiden für nötig fand. Hoffentlich wird dieser Unterschied in den Lehrbüchern jetzt immer gebührend berücksichtigt, nachdem einige Autoren mit gutem Beispiel vorangegangen.

[2]) Scherling sagt in seiner ausführlichen Besprechung des Kruseschen Werkes in H. Z. VII. p. 212 f auf Seite 213: „Die gerade Linie wird definiert als eine „Linie, welche ihre Lage nicht ändert, während sie sich um zwei ihrer Punkte dreht." So einfach diese von F. C. Maier herrührende Definition ist (sie war doch im wesentlichen schon im Altertum bekannt), so wissen wir sie nicht recht in Einklang zu bringen mit der im vorausgehenden § gegebenen Erklärung der drehenden Bewegung, bei welcher ein Punkt seine Stelle nicht verläfst, während andere Punkte desselben Raumelements nach anderen Stellen rücken. Jedenfalls hätte in dem angezogenen § 3, 2 noch erwähnt werden müssen, dafs auch zwei oder mehrere Punkte zugleich fest bleiben könnten. Worpitzky umgeht diese Definition, indem er schlankweg diejenige Linie, welche bei der Drehung einer Figur um zwei feste Punkte in Ruhe bleibt, also die Drehungsaxe, eine gerade Linie nennt. Uns scheint die Sache e contrario recht klar zu werden, indem man zuerst die krumme Linie definiert, etwa so: Wenn eine feste Linie um zwei feste Punkte gedreht wird und dabei alle übrigen Punkte ihre Stelle verändern, so heifst sie eine krumme Linie, ändern dagegen bei solcher Drehung die übrigen Punkte ihre Stelle nicht, so heifst sie eine Gerade." Mir scheint, es werde wenig dadurch gewonnen.

J. W. Camerer: Euclidis elem. graece et latine. Berolini 1824. I. p. 8. Auch K. F. Gaufs bediente sich ihrer (H. B. Lübsen: Elementargeometrie. Hamburg 1855. S. 11). Vergl. Leibnizens math. Schr. V. S. 185.

Kunze, L. d. G. I. — Jena 51. — fügt der Euklidschen Definition drei Anmerkungen hinzu, von denen die ersten beiden hier angeführt werden sollen:

Anm. 1.: „Die gerade Linie ist ihrer Art nach nur eine; der krummen, etc. Linien giebt es unzählig viele."

Anm. 2.; „Euklides sagt: eine gerade Linie ist diejenige, welche (zwischen) den in ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt. Diese Erklärung, die ziemlich dunkel ist, haben einige so gedeutet, dafs bei einer geraden Linie, wenn man sie um zwei in ihr angenommene feste Punkte herumdreht, alle Punkte ihren Ort unverändert beibehalten.[1]) Man hat noch verschiedene andere Erklärungen der geraden Linie, alle aber setzen im Grunde voraus, dafs man bereits wisse, was eine gerade Linie sei; sie sind nur als blofse Erläuterungen eines an sich bekannten und gemeinen Begriffs anzusehen."

Diesen Ausführungen fügt Kunze die übrigen Eigenschaften der geraden Linie als Grundsätze hinzu. Zu dem Grundsatz: „Die gerade ist kleiner als jede andre Linie, die mit der geraden dieselben Endpunkte hat,"[2]) wird der Zusatz gemacht: „Daher ist die gerade Linie zwischen zwei Punkten die rein anschauliche Vorstellung der Entfernung oder des Abstandes der beiden Punkte von einander." Kunze fügt noch in einer Anmerkung hinzu, dafs Euklid diesen Satz nicht als Grundsatz, sondern als Lehrsatz aufstelle und beweise „mit

---

[1]) Eine Gerade, die in zwei Punkten fest ist, ist überhaupt fest, und der Gedanke, dafs sie sich in sich selbst drehen könne, mufs als ein grundfalscher energisch zurückgewiesen werden. So wenig wie mit der Vorstellung des Punktes überhaupt der Begriff der Bewegung zu verbinden möglich ist, — wir könnten in der That den Punkt als die absolute Ruhe bezeichnen — so wenig ist an irgend eine Bewegung der Geraden zu denken, wenn zwei Punkte fest sind.

[2]) Dieser Erklärung steht das schon erwähnte Bedenken entgegen, dafs zu der Erklärung der Geraden demnach alle anderen Linien herbeigezogen werden.

Weitläufigkeiten und Annahmen, die mindestens keine gröfsere anschauliche Klarheit haben, als der einfache Satz selbst.“ Es heifst weiter:

„Die Forderung, alles zu beweisen, was sich noch irgend beweisen lasse, scheint hier mehr von philosophischem als von geometrischem Interesse zu sein. Archimedes, der gröfste Geometer des Altertums, sagt daher ohne Bedenken: ich nehme an, dafs unter solchen Linien, welche einerlei Endpunkte haben, die gerade die kleinste sei.“

Legendre ed. Crelle. — Berlin 1844. — stellt den Grundsatz: „Die gerade Linie ist der kürzeste[1]) Weg von einem Punkt zum andern“ als Erklärung an die Spitze[2]) (III.) und giebt später unter den Grundsätzen: „Von einem Punkt zum andern kann nur eine gerade Linie gezogen werden“ (4) und als Lehrsatz (3): „Zwei gerade Linien, welche zwei Punkte gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen und bilden nur eine und dieselbe gerade Linie.“

Dieser Satz wird ausführlich bewiesen (mit Hülfe von Winkelsätzen). Crelle bemerkt dazu: „Bei der obigen Erklärung der geraden Linie scheint dieser allerdings stringente Beweis möglich und nötig.“

Lieber und von Lühmann geben die genetische Definition mit Hülfe des Richtungsbegriffes und stellen die Eigenschaften der Geraden als Grundsätze auf.

---

[1]) Vergl. Gilles, Bedenkliche Richtungen in der Mathematik. — H. Z. XI. p. 5—24. — p. 20: „Untersuchen wir daher die Definition der Geraden. Wenn man als Begriffsbestimmung mit Kant annimmt: „Die Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten“, so ist nach zwingenden Denkgesetzen doch gemeint „von allen möglichen Linien zwischen den zwei Punkten,“ und es ist also der logische Unfug nicht gestattet, auch auf der Kugeloberfläche oder auf der Pseudosphäre die kürzesten Linien Geraden zu nennen.“ (Das geschieht auch nicht; sie werden geradeste genannt. D. Verf.)

[2]) J. Kober, Über die Definitionen etc. in H. Z. I. p. 232: „Diese Definition giebt gleichfalls nicht den ursprünglichen Begriff der Geraden, sondern eine nur noch entferntere Ableitung als die Euklidische (? D. Verf.); ihr Inhalt mufs daher als Lehrsatz, oder vielmehr als Grundsatz, aber nicht als Definition angeführt werden.“

Liese, Elementar-Mathematik I. — Berlin 1875. — Desgleichen.

Milinowski nimmt die Gerade als Grundgebilde der Geometrie; ihre Eigenschaften werden einfach angegeben.

Mink.

„Der Begriff der geraden Linie oder der Geraden ist ein einfacher, eine Erklärung derselben daher nicht möglich, aber auch einer solchen nicht bedürftig. Die Gerade giebt die von einem Punkte ausgehende Richtung an.“[1])

E. Müller, Elemente der Geometrie. — Braunschweig 1869.

Nachdem Müller im Vorwort sich gegen die übertriebene Sucht zu definieren ausgesprochen, fügt er folgende Definitionen der geraden Linie mit Bemerkungen hinzu:

„„Eine Linie ist gerade, welche zwischen jeden in ihr befindlichen Punkten auf einerlei Art liegt.““

„Liegt nicht etwa auch die Kreislinie zwischen ihren Punkten auf einerlei Art? Auf welcherlei Art liegt nun die eine und auf welche die andere Linie?“[2])

„„Eine Linie heifst gerade, wenn jedes beliebige Stück derselben mit zwei beliebigen Punkten, irgendwo und irgendwie auf dieselbe gelegt, mit ihr zusammenfällt.““

„Irgendwie? Was heifst das?“

„„Diejenige Linie ist gerade, welche zwischen ihren Endpunkten durchaus dieselbe Lage hat.““

„Wenn die Linie aber unendlich ist? Was heifst durch-

---

[1]) Besser wohl: eine bestimmte unter den unendlich vielen von einem Punkt ausgehenden Richtungen. Auch fehlt die Erwähnung der zugleich gegebenen entgegengesetzten Richtung.

[2]) Dies Beispiel pafst (wenn man sich allerdings mehr an den Sinn, als an die Worte hält) doch wohl nicht, denn zwischen zwei Punkten können wir uns unendlich viele Kreisbogen denken; es existiert doch nicht etwa nur ein Kreis! Der Begriff der Einfachheit in der Vorstellung der Geraden wird hier in etwas andrer, allerdings nicht glücklicher Form betont. (Dies soll meiner Meinung nach mit dem „auf einerlei Art liegen“ gemeint sein.)

aus dieselbe Lage haben, wenn die Lage nirgend eine Definition gefunden?"

„„Diejenige Linie ist gerade, welche in allen ihren Punkten einerlei Richtung hat; oder welche die anfängliche Richtung immer beibehält, wie weit man (?) in ihr auch fortgeht (?).""

„Wäre denn nicht vorher die Richtung zu definieren gewesen?"

„„Die Gerade ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.""

„Mischt diese Definition nicht ein fremdartiges Moment ein, das der Quantität? Und auf welche Weise soll unter den unendlich vielen Wegen, welche zwischen zwei Punkten möglich sind, der kürzeste ermittelt werden? Will man messen? Womit denn? Die Grundeigenschaft der Geraden, welche jeder Handwerker zur Prüfung der Richtigkeit des Lineals, d. h. einer materiellen Geraden anwendet, haben die Mathematiker übersehen, obschon sie dieselbe unzähligen Beweisen ihrer Sätze zu Grunde legen."

Und nun zur Definition E. Müllers selbst:

„Eine Linie heifst gerade Linie oder Gerade schlechtweg, wenn sie von der Beschaffenheit ist, dafs jede sie enthaltende Ebene auf ihren beiden Seiten in ihrer ganzen Ausdehnung nach den beiden entgegengesetzten Gegenden von einerlei Beschaffenheit ist, und dafs die beiden Seiten mit den zugehörigen Ebenenteilen oder ohne dieselben miteinander vertauscht werden können. Da aber eine Linie als gemeinschaftliche Grenze zwischen den Ebenenteilen auf beiden Seiten als zweifache erscheint, so werden zwei Geraden und die auf beiden Seiten der Geraden befindlichen Ebenenteile mit jeder Seite und nach jeder Gegend hin dergestalt aufeinander gelegt werden können, dafs sie wieder nur eine Gerade und eine Ebene bilden. Jeder der beiden Ebenenteile zu beiden Seiten einer Geraden ist dem andern gleich, also die Hälfte der ganzen Ebene oder eine Halbebene."[1])

[1]) Zu meinem lebhaften Bedauern kann ich mich mit der hier von dem hochgeschätzten Verfasser gegebenen Definition der Geraden nicht befreunden; keinesfalls ist sie im Unterricht verwertbar. Wie aus den vorhergehenden Bemerkungen Müllers hervorgeht, weist er den Begriff des „Abstandes" als ein „fremdartiges Moment" vollständig zurück.

„Welche Definitionen der Geraden die einzelnen Geometer auch gegeben haben, jeder ohne Ausnahme kommt auf diese Eigenschaft als die wesentliche zurück und kann ohne sie die geometrischen Fundamentalsätze der Kongruenz teils nur mangelhaft, teils gar nicht beweisen. Alles Klappen und Schwenken der durch Gerade bestimmten Gebilde setzt diese Definition voraus."

Aus dieser Definition folgt dann, dafs zwischen zwei Punkten nur eine Gerade möglich ist 1) wegen der Kongruenz der Halbebenen und 2) „weil sonst die Punkte der einen sich nicht alle selbst entsprechen würden, wenn die der andern es thun."

„Dies sich selbst Entsprechen der Punkte einer Geraden, welche die Ebene in zwei Halbebenen teilt, ist der Grund, weshalb man eine Halbebene um die Gerade als Axe drehen kann. Die Axe einer Drehung kann nur eine Gerade sein."

H. Müller, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1874.

„Die einfachste Linie ist die Gerade. Durch zwei Punkte geht nur eine einzige Gerade (Axiom der Geraden)."

J. H. T. Müller, a. a. O.

„Eine Linie heifst gerade, wenn jedes beliebige Stück derselben mit zwei beliebigen Punkten, irgendwo und irgendwie auf dieselbe gelegt, überall mit ihr zusammenfällt."[1])

Warum? Der Begriff des Abstandes ist nicht weniger dem menschlichen Denken inhärent, als der Begriff der Richtung. — Man vergleiche übrigens die in dem Zitat aus Pfleiderers Scholien vorkommende Definition des Archimedes von Syrakus.

[1]) Auch bei dieser Erklärung liegt meiner Meinung nach der Begriff der Geraden zu Grunde. — Vergleiche die Anmerkung zu Spitz. — Ferner J. Kober, Über die Definition etc. in H. Z. I, p. 232: „Diese Definition zeigt recht deutlich, auf welche Ungereimtheiten das übertriebene Streben nach Definitionen führen kann. Sieht es nicht aus, als wolle man den Schüler absichtlich verwirren, indem man ihm einredet, dafs der Begriff der geraden Linie, der ihm von Kindheit an klar und geläufig ist, keineswegs einfach sei?"

Petersen, Lehrbuch der ebenen Planimetrie. ed. Fischer-Benzon. — Kopenhagen 1881. — definiert die Gerade als die Linie der ihre Stelle nicht verändernden Punkte eines Körpers, wenn dieser sich um zwei feste Punkte dreht.

Pfleiderer, Scholien.

„Es scheint der Begriff von gerader Linie lasse sich wegen seiner Einfachheit durch keine regelmäfsige Definition erklären, die nicht Wörter, die deren Begriff schon in sich schliefsen (dergleichen sind Richtung, Gleichheit oder Einerleiheit der Lage, Zug ohne Biegung), hereinnehme; und man könne denjenigen, der nicht weifs, was die Benennung gerade hier bedeutet, es nicht anders lehren, als dadurch, dafs man ihm ein Bild oder eine Zeichnung davon auf irgend eine Art darstellt.“[1])

„Der Analogie (mit der Definition der Ebene) nach, aber mit einem fehlerhaften Zirkel, könnte man den Sinn der Definition der geraden Linie so verstehen: eine Linie heifst gerade, wenn jede irgend zwei Punkte derselben verbindende gerade Linie auf dieselbe falle.“

Kästners Anfangsgründe der Geom. Erkl. S. 169 ff.

„„Eine gerade Linie ist, deren Punkte alle nach einer Gegend zu liegen.““[2])

„„Die gerade Linie wird niemand aus irgend einer Erklärung kennen lernen; und niemand hat es auch nötig. Aber man kann wohl etwas von ihr sagen, das die Aufmerksamkeit

---

[1]) Zerlang sagt in H. Z. III, p. 266: „Die Begriffe gerade, eben etc. haben das Eigene, dafs sie die neutralen, die Grenzbegriffe zu zwei sie einschliefsenden entgegengesetzten oder relativen Begriffen sind, und dafs ihre Erklärungen mehr oder minder den strengen Anforderungen einer logischen Definition sich nicht recht fügen wollen.

Dazu hat es nun der Sprache gefallen, alle diese neutralen Begriffe mit positiven Namen zu versehen, die beständig das Bedürfnis nach positiven Erklärungen wach erhalten.“ Es wird dann folgende Definition gegeben: „eine Gerade ist eine kongruentseitige Linie.“

[2]) Das ist doch vielmehr die Definition des Strahles; man müfste denn den Punkt, von dem aus alle Punkte nach einer Gegend zu liegen, im Unendlichen annehmen.

leitet, auf das, was sie zu einer geraden Linie macht, genauer Acht zu geben. Wenn man in *A* einen Punkt, einen Körper, auf dessen Gröfse man nicht sieht, setzt: so kann sich derselbe von seinem Orte nach unzähligen Gegenden bewegen. Sagt man, er soll nach *B* zu gehen, so ist die Gegend bestimmt, nach der er gehen soll; und er könnte nach eben der Gegend noch über *B* hinaus nach *F* gehen. — Weil alle Teile einer geraden Linie *AB*, *BF* nach einerlei Gegend zu liegen; so findet man in keinem Teile etwas, das nicht auch in dem Ganzen zu finden wäre: denn das Ganze streckt sich nach eben der Gegend. Nur die Gröfse unterscheidet den Teil von dem Ganzen; und man kann also sagen: bei der geraden Linie sei jeder Teil dem Ganzen ähnlich.[1]) Wolf hat dieses für eine Erklärung der geraden Linie angegeben; und die Ähnlichkeit in eben dem Umstande gesucht, den ich angezeigt habe (Elem. Geom. § 19). Ich finde nicht, dafs ihn dieses in den Stand gesetzt, von der geraden Linie etwas Neues oder Gründlicheres, als man vor ihm wufste, zu sagen.““

Kästners Abhandlungen III. S. 51 ff.

„„Euklids Axiome von der geraden Linie beruhen alle auf klaren Begriffen, weil man keine Erklärung der geraden Linie hat.““

„„Wolfs Erklärung: Jeder Teil einer geraden Linie sei der ganzen ähnlich, ist durch das Wort Ganze einer Chikane ausgesetzt. Was heifst die ganze gerade Linie? Der Kreis ist ein Ganzes: aber die gerade Linie nie; weil sie immer kann verlängert werden. Richtiger wäre der Ausdruck, den er im Zusatze zu dieser Erklärung Elem. Geom. § 18 braucht: Teile einer geraden Linie sind nur durch Gröfse unterschieden. Übrigens ist, wenn man die gerade Linie noch nicht kennt, schwer zu verstehen, worauf die Ähnlichkeit eines Teils mit den andern ankommt. Freilich zeigt Wolf § 29: dafs dazu immer einerlei Richtung des Punkts, der sie beschreibt, er-

[1]) Diese Erklärung hat etwas Bestechendes an sich. Es fragt sich nur, welcher Begriff uns als der natürlichste erscheint, derjenige der Geraden oder der der Ähnlichkeit. Man vergl. auch das folgende Zitat.

fordert werde. Aber wer hat einen Begriff von Richtung, ohne die gerade Linie zu denken, durch welche die Richtung angegeben wird? Also sagt Wolfs Erklärung: Eine gerade Linie wird von einem Punkte beschrieben, der sich immer in gerader Linie bewegt.““[1])

„„Daſs also Wolf eigentlich eine Erklärung der geraden Linie gegeben habe, an der jemand sie kennen könnte, das glaube ich nicht. Allemal aber ist es nützlich, solchergestalt Aufmerksamkeit auf das zu erregen, was Gerade vom Ungeraden unterscheidet. Auch hat Wolf seinen Begriff gebraucht, zu zeigen: daſs gleiche gerade Linien einander decken; und daſs durch zwei Punkte nur eine gerade Linie geht (Elem. Geom. 168 f.).““

Kästners Abhandlungen I. S. 15.

„„Euklid setzt bei seinen Lehrlingen einen klaren Begriff von einer geraden Linie zum voraus. Denn weder aus seiner Definition, noch aus irgend einer andern, wird jemand eine gerade Linie kennen lernen, der noch kein solches Ding, davon die Geometrie den Begriff der geraden Linie abstrahiert, gesehen oder gefühlt hat.““

Klügels mathematisches Wörterbuch III.

„„Die gerade Linie ist diejenige, welche zwischen den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig (auf einerlei Art) liegt.[2]) — Die Gleichförmigkeit der Lage der Teile ist es, was die

[1]) Daſs dieser letzte Einwand hinfällig ist, geht aus den Ausführungen am Anfang des Kapitels hervor, obwohl nicht geleugnet werden soll, daſs er auf den ersten Blick von Bedeutung zu sein scheint. Es kommt aber nicht darauf an, ob wir uns die Richtung nicht ohne Gerade denken können, sondern daſs die Richtung existiert, auch wenn die Gerade nicht da ist. Die Richtung hat objektive Realität unabhängig von dem subjektiven Hinzusetzen der Geraden.

[2]) Friedlein, Untersuchung der sog. Definitionen Heros in H. Z. II. p. 181: „Der Definition Euklids ist beigefügt *ὀρθὴ οὖσα καὶ οἷον ἐπ' ἄκρον τεταμένη ἐπὶ τὰ πέρατα.*“ Der Verfasser habe also die Unklarheit der Euklidischen Definition gefühlt und sie zu verdeutlichen gesucht durch die Begriffe des gleichmäſsig Gestreckten und der Spannung. Auch dies sei kein deutlicher Ausdruck.

gerade Linie von der krummen unterscheidet. — Diese Identität in der Lage der Teile gegeneinander, sowohl der benachbarten, als der entfernten, ist die Ursache, warum es sich nicht zeigen läfst, wie sie gezeichnet oder konstruiert werden kann. Der kleinste Teil ist wie der gröfsere beschaffen; von keiner andern Gröfse oder Lage abhängig. — Euklides setzt es daher als Postulatum: von jedem Punkt aus bis an jeden andern eine gerade Linie ziehen; eine begrenzte gerade Linie stetig geradefort verlängern. Das heifst: man mufs den Begriff von einer geraden Linie zur Geometrie mitbringen. Sie ist eine ursprüngliche Vorstellung des reinen Verstandes, die nicht aus der Erfahrung geschöpft wird. — Auf der Gleichförmigkeit der Lage in einer Linie beruht es, dafs zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie stattfindet; oder dafs sie durch zwei Punkte in ihrer ganzen unbegrenzten Ausdehnung völlig bestimmt wird. — Daher kann man auch die gerade Linie für diejenige erklären, welche durch zwei Punkte in ihrer ganzen unbegrenzten Ausdehnung nur auf eine einzige Art gezogen werden kann. Zwei Punkte durch eine gerade Linie verbinden heifst das: diejenige Linie sich zwischen ihnen gedenken, welche nur auf eine einzige Art zwischen ihnen gedacht werden kann. Eine gegebene gerade Linie verlängern, heifst nur, ihre Begrenzung aufheben.““

„„Diese Vorstellungen scheinen die griechischen Geometer bei den Beweisen zum Grunde gelegt zu haben. Nicht aus der Erklärung der geraden Linie leitet Euklides etwas her; sondern aus dem Grundsatze: dafs zwei gerade Linien keinen Raum einschliefsen. Das ist aber im Grunde nichts anderes als der Satz: Es ist nur eine einzige gerade Linie zwischen zwei Punkten. Die Erklärung der geraden Linie steht inzwischen nicht blofs wegen der methodischen Form da: sondern sie dient, den abstrakten Begriff von der geraden Linie zu erwecken und den Geist von der gröberen sinnlichen Vorstellung abzuziehen.““

Der Herausgeber von Pfleiderers Scholien Eph. Hauber fährt fort:

„Wir führen noch eine oder zwei Definitionen der geraden

Linie aus Proklus an, welche zu dem Bisherigen in einiger Beziehung stehen. Nach der einen ist sie „diejenige, die, so lange ihre Grenzen bleiben, selbst auch bleibt“, *ἡ τῶν περάτων μενόντων καὶ αὐτὴ μένουσα*[1]) (Proklus, p. 30. S. Chrestomathia geometrica S. 90.): nach der andern „diejenige, deren Teile alle auf alle gleicherweise passen“ (*πάντα αὐτῆς τὰ μέρη πᾶσιν ὁμοίως ἐφαρμόζει*).[2]) Man nimmt nämlich zu ihrer Erklärung den Begriff der Bewegung zu Hülfe. Man kann sich, was auch die Euklidische Definition fordert, eine gerade Linie abgesondert von verschiedenen auf ihr liegenden Punkten vorstellen. Schiebt man sie nun dergestalt in Gedanken hin und her, dafs sie immer auf einigen dieser Punkte liegen bleibt, oder durch sie geht; so bleibt sie auch auf den übrigen oder geht auch durch die übrigen Punkte, so weit sie reicht: keiner dieser Punkte ist bei dieser Bewegung aus ihr herausgetreten, keiner seitwärts von ihr gekommen. Hiernach wäre eine gerade Linie diejenige, welche nicht bei einer Hin- und Herbewegung auf einigen ihrer Punkte liegen bleiben kann, ohne auch, so weit sie reicht, auf den andern zu bleiben. Soll sie aber aus ihrer Lage heraustreten, so mufs sie aus allen ihren Punkten zugleich, einen einzigen etwa ausgenommen, heraustreten: so lange sie auch nur zwei Punkte ihrer ersten Lage behält, so behält sie ihre erste Lage ganz mit allen Punkten derselben. Sollte dieses etwa im Sinne der Euklidischen Definition liegen?“

„Alle Teile der geraden Linie passen auf alle gleichmäfsig. Dieses hat ebenfalls bei dem erwähnten Hin- und Herschieben Statt. Es läfst sich zwar auch ein Kreisbogen auf der Kreisperipherie, wovon er ein Teil ist, so herumschieben, dafs er immer auf der Peripherie liegen bleibt; und man kann sagen, dafs auch alle Teile der Kreisperipherie auf alle passen. Aber um dieses zu bewerkstelligen, ist noch nicht genug, wie bei der geraden Linie, dafs man zwei Punkte des einen Teils auf

---

1) Friedlein in H. Z. II, p. 182. — v. Staudt nehme in seiner Definition an Stelle der beiden Endpunkte zwei beliebige Punkte an.

2) Auch Friedlein in H. Z. II, p. 181 — macht darauf aufmerksam, dafs schon die Alten wufsten, dafs diese Eigenschaft auch dem Kreis und der Schraubenlinie zukommt.

zwei Punkte des andern Teils bringe; denn die zwei Bögen können sich in diesen zwei gemeinschaftlichen Punkten schneiden; und wenn die Höhlungen der zwei Bögen nach verschiedenen Seiten zugekehrt sind, so lassen sie sich nicht zum Passen bringen.“

„Ferner beim Zirkelbogen ist das, was vom Raum an der einen und was an der andern Seite desselben liegt, unähnlich begrenzt; der eine hohl, der andere erhaben: und das Gleiche findet bei jeder Krümmung statt. Bei der geraden Linie hingegen ist der Raum, der an der einen und derjenige, der an der andern Seite von ihr liegt, völlig auf ähnliche Art durch sie begrenzt.“

„Archimedes von Syrakus vorhandene Werke. Aus dem Griechischen übersetzt von Ernst Nitze. Stralsund 1824. S. 43. Note β. „„An jeder Linie, sie sei gerade oder gebogen, lassen sich zwei Seiten unterscheiden, weil keine Linie ohne die zwei Flächenräume gedacht werden kann, welche sie von einander trennt. Befindet sich die trennende Linie in einer Ebene, und sind die dadurch getrennten Ebenenräume durch nichts andres zu unterscheiden, als durch ihre entgegengesetzte Lage; so ist die Linie gerade.““ Ferner bei jedem Ungeraden findet ein Mehr und Weniger Statt. Gegen einen bestimmten Teil einer Linie sind, wenn sie ungerade ist, einige der übrigen Teile oder Punkte mehr, andre weniger seitwärts gerückt, oder nebendraufsen gelegen; bei der geraden Linie giebt es nur ein Fortgehen, kein Nebenhinausgehen, kein Seitwärtsliegen.“

„„Gedenkt man sich einen noch so wenig gekrümmten Kreisbogen oder irgend einen krummen Bogen um seine Endpunkte als Pole sich herumdrehend; so beschreibt derselbe einen körperlichen Raum, er nimmt in jedem Augenblick seiner Bewegung eine von der vorigen verschiedene Lage an; und in den zwei Lagen, welche er in einer und derselben Ebene z. B. am Anfang der Bewegung und nach vollendeter halber Umdrehung einnimmt, stellt er zwei Linien dar, die miteinander eine ebene Figur, ein krummliniges Zweieck bilden. Eine gerade Linie hingegen, um ihre zwei Endpunkte oder irgend zwei ihrer Punkte als Pole gedreht, beschreibt keine Figur, beschreibt nichts Neues, tritt nicht aus ihrer anfäng-

lichen Lage heraus, bleibt immer in demselben Ort des Raumes. Dies erläutert wiederum die oben angeführte Definition, ἡ τῶν περάτων μενόντων καὶ αὐτὴ μένουσα. Die Definition der geraden Linie „quae circa suum utrumque extremum, tamquam polos voluta locum non mutat“ führt Kraft als ihm von F. C. Maier mitgetheilt an, und Herr Camerer sagt auch, daſs sie ihm am besten gefalle und bemerkt, wie einige der hauptsächlichsten Axiome von der geraden Linie sich aus ihr herleiten lassen[1]) (Eucl. Elem. ed. Camerer. Berolini 1824. p. 8).““

Rausenberger a. a. O. — wählt als Fundamentallinie die Gerade „durch ein gewisses Gefühl der Einfachheit geleitet.“

Die verbreiteten Definitionen der Geraden als Linie von einerlei Richtung und die Euklidische weist er als ganz unzulänglich zurück; ebenso die Definition der Geraden als der kürzesten Verbindungslinie, da zur Gröſsenvergleichung erst wieder ein neues Axiom nötig sei. Dann fährt er fort:

„Trotzdem ist es möglich, die Gerade durch anschauliche Konstruktion zu erzeugen.“

Es wird nun die Gerade als die Gesamtheit der festen Punkte bei der Drehung um zwei feste Punkte definiert und auf Kruses Auseinandersetzung näher eingegangen.[2])

In einer Anmerkung fügt Rausenberger hinzu:

„Erwähnt sei noch die Definition von P. Cassani (Nuove proposte interno ai fondamenti della geometria, Giorn. mat. d. G. Battaglini, XV, p. 284—289): Eine Gerade ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von drei Punkten gleichen Abstand haben, die einen Kreis in drei gleiche Teile teilen. Der Kreis sowie der feste Abstand zweier Punkte lassen sich, wie wir noch sehen werden, ohne weitere Voraussetzungen definieren.“

Die Eigenschaften der Geraden werden aus ihrer Entstehungsweise gefolgert.

---

[1]) Vergl. Zitat aus Kruse.

[2]) Vergl. dazu die Bemerkung, daſs dabei unbewuſst die Vorstellung der Geraden schon zu Grunde liegt und Kruse Zitat.

Recknagel a. a. O.

„Der Begriff der geraden Linie mufs als elementar vorausgesetzt werden."

Die beiden Grundsätze, die hinzugefügt werden, sind als „Grundsatz der Lage" und „Grundsatz der Gröfse" bezeichnet.

Reidt, Anleitung.

„Ebenso quäle man sich nicht ab, dem Anfänger eine wissenschaftlich durchaus haltbare Definition der geraden Linie ... zu geben."

„Wir müssen vielmehr im Unterrichte eine Anzahl von Grundbegriffen als durch die äufsere und innere Anschauung gegeben annehmen"...

„Viele Mathematiker haben sich vergeblich bemüht, eine vorwurfsfreie Definition der geraden Linie zu geben, kein einziger derselben würde aber deshalb zugegeben haben, dafs ihm der Begriff der Geraden nicht völlig klar sei."

„Wie die Axiome, ... so dürfen die einfachsten Grundbegriffe als solche vorausgesetzt werden, welche man nicht imstande sei auf noch einfachere zurückzuführen, die vielmehr durch innere Anschauung oder Erfahrung unmittelbar gegeben und höchstens der Erklärung und Erläuterung bedürftig seien."

Reidt, Elemente — giebt aber im Gegensatz zu dieser Auseinandersetzung eine Definition der Geraden und zwar: „Eine gerade Linie hat in allen Punkten dieselbe Richtung."

Schindler, a. a. O. — geht von der Betrachtung zweier Punkte aus, deren einer der Augenpunkt genannt wird (Lichtstrahl).

„Richtung heifst die räumliche Beziehung zwischen zwei Punkten."

„Strecke heifst die durch zwei Punkte bestimmte Länge."

„Die durch Strecke und Richtung bestimmte Gerade ist das Fundament für die ganze Geometrie."[1])

---

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

Schlegel, System der Raumlehre I. — Leipzig 1872.

p. 3. „Es giebt eine unbeschränkte Menge von Bewegungen, zwischen denen ein Punkt im Anfange seiner Änderung die Wahl hat. Das unterscheidende Merkmal einer solchen Anfangsbewegung heifst ihre Richtung.“

„Fährt der Punkt in der einmal gewählten Anfangsbewegung fort, so heifst seine Gesamtbewegung einfach. Das Merkmal einer einfachen Bewegung ist also ebenfalls ihre Richtung.“

p. 6. „Wenn ein Punkt seine Lage durch einfache Bewegung ändert, so heifst das von ihm erzeugte Gebilde (sein Weg): eine Gerade (gerade Linie).“

Die Lage des erzeugenden Punktes und die Richtung der Bewegung sind danach die Merkmale der Geraden.[1])

Schlegel, L. d. e. M. II. — Wolfenbüttel 1879.

Die Gerade wird auf dieselbe Weise definiert, wie im System der Raumlehre. Es heifst dann noch von ihr:

„Die Gerade ist 1) einmal ausgedehnt, 2) einfach, 3) unbegrenzt, 4) unendlich, 5) in sich beweglich.“

Snell, L. d. G. I. — Leipzig 1857.

„Die gerade Linie hat nur zwei Eigenschaften, welche einer näheren Bestimmung fähig sind, nämlich Länge und Richtung.“

Snell setzt also den Begriff der Geraden als bekannt voraus und giebt die Begriffe als ihre Eigenschaften, die er nun hauptsächlich auf die Betrachtung zweier getrennten Punkte stützt, welche doch das Primäre sind und aus welchen die Gerade sich zusammensetzt.

Spitz, L. d. e. G. — Leipzig 1888.

„Fällt jeder beliebige Teil einer Linie, wenn er mit zwei beliebigen Punkten irgendwo und auf irgend welche Weise

---

[1]) Die zweite Grundvorstellung des Abstandes bleibt dabei ganz unberücksichtigt.

auf dieselbe gelegt gedacht wird, überall mit ihr zusammen, so sagt man die Linie sei gerade."[1])

In einer Anmerkung fügt Spitz hinzu, dafs seine Erklärung identisch sei mit derjenigen, die die Gerade aus dem Begriff der Drehung entwickelt.

---

van Swinden, ed. Jacobi. — Jena 1834.

„Eine gerade Linie ist eine solche, die durchaus dieselbe Lage zwischen ihren Endpunkten hat."[2])

„Zus. Sind daher zwei Punkte gegeben, so wird ihr Abstand voneinander durch die Gerade gemessen, die man von dem einen zum andern zieht."

Das „daher" in diesem Zusatz ist wohl nicht am Platze; die im Zusatz erwähnte Eigenschaft der Geraden steht doch zu der gegebenen Definition nicht im geringsten Zusammenhang.

„Anmerkung 1. Andere sagen: die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Inzwischen scheint diese Erklärung mehr eine Folgerung aus unserer Erklärung, als ein Grundbegriff zu sein. Aber wie dem auch sein möge, so wird, wenn man diese Erklärung annimmt, der Lehrsatz:[3]) „In jedem Dreiecke sind zwei Seiten zusammen gröfser als die dritte" ein Grundsatz, während der Grundsatz[4]) „Gerade

[1]) Gerade diese Definition zeigt recht deutlich, dafs das Bemühen um eine Erklärung der Geraden ein vergebliches ist, wenn man nicht von den Grundbegriffen Richtung und Abstand ausgeht; wer, der nicht schon das Bild der Geraden in seiner Vorstellung hat, könnte sich wohl aus dieser Erklärung eine Vorstellung von der Geraden machen?

[2]) „Vielleicht noch richtiger könnte man sagen: eine gerade Linie ist diejenige, welche zwischen je zweien ihrer Punkte durchaus dieselbe Lage hat. Denn es giebt auch krumme Linien, welche wenigstens insofern eine völlig gleiche Lage zwischen ihren Endpunkten haben, als dieselbe sich nicht ändert, wenn man die beiden Endpunkte ihre Stellen untereinander wechseln läfst; z. B. ein halber Umkreis u. m. a. Anm. d. U."

[3]) Es ist der 43. Lehrsatz.

[4]) Der 4. Grundsatz:

Dazu heifst es in einer Anmerkung: Für diejenigen, welche die gerade Linie als den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten erklären, hört dieser Satz auf, Grundsatz zu sein; er wird vielmehr Lehrsatz, der bewiesen werden mufs, wie dies unter andern auch gethan hat Legendre I, 3. vergl. Zitat.

Linien, bei denen zwei Punkte der einen mit zwei Punkten der anderen zusammenfallen, fallen in ihrer Richtung ganz zusammen“ sich in einen Lehrsatz verwandelt, der eines Beweises bedarf.“

„Anmerkung 2. Es verhält sich mit dieser Erklärung, wie mit allen Erklärungen von Dingen, die zu einfach sind, als dafs sie noch einer Erläuterung durch Worte fähig wären — sie sind alle ungenügend und mehr oder weniger dunkel. Man lese besonders, was hierüber gesagt ist von d'Alembert in seinen Melanges etc. IV, 163 und V. 203—206.“

Thibaut, Gr. d. r. M. — Göttingen 1822.

„1) Die gerade Linie ist die erste und einfachste aller geometrischen Konstruktionen. Ihre Erzeugung hebt mit dem Setzen eines Anfangspunktes an, bleibt indessen unbestimmt und auf unendlich viele Arten möglich, so lange nichts als ein solcher Anfangspunkt gegeben ist. Sobald hingegen noch ein zweiter Punkt als Endpunkt gleichfalls gesetzt wird, hört jede Unbestimmtheit der Konstruktion gänzlich auf. Wo auch im Raume zwei Punkte als Grenzen einer geraden Linie gegeben sein mögen, so wird jedesmal zwischen ihnen eine solche, aber auch nur eine einzige gerade Linie möglich sein. Die Raumbeschreibung, vermöge deren die Konstruktion einer geraden Linie von ihrem Anfangspunkte zum Endpunkte fortschreitet, wird progressive Bewegung eines Punktes genannt.“

„2) Das Wort Richtung bezeichnet den als notwendig erscheinenden Gang, welchen die Konstruktion einer geraden Linie in ihrem ganzen Verlauf zu nehmen hat, sobald sie von einem bestimmten Anfangspunkte zu einem gegebenen Endpunkte fortschreiten soll. Die Richtung einer geraden Linie ist durchaus immer dieselbe, die gerade Linie selbst ihr unmittelbarer Ausdruck.“[1])

„3) Jede gerade Linie hat eine willkürliche Gröfse und kann über ihre beiden Grenzpunkte hinaus beliebig fortgesetzt

[1]) An einer andern Stelle sagt Thibaut:

„Da Ausdruck einer bestimmten Richtung oder gerade Linie gleichbedeutend sind,“ . . .

oder verlängert werden.[1]) Aber bei einer solchen Verlängerung dauert die Notwendigkeit im Gange der Konstruktion, welche durch das Setzen ihrer anfänglichen Grenzpunkte entstanden war, unbedingt fort, und nur die Gröfse dieser Verlängerung bleibt beliebiger Bestimmung überlassen. Die Richtung einer geraden Linie und ihrer Verlängerung ist durch jeden noch so kleinen Teil derselben vollkommen bestimmt, und nur eine einzige, während ihre Gröfse keine andere als willkürliche Grenzen anerkennt."

„4) Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei gegebenen Punkten; jeder andere, diese beiden Punkte verbindende, auf welche Art er auch konstruiert werden möge, besitzt eine gröfsere Länge als sie."

„5) Die Länge ist das einzige Quantitative in der Vorstellung einer geraden Linie oder die einzige Dimension derselben;[2]) zwei gerade Linien von gleicher Länge sind identisch oder kongruent, d. h. die eine kann im Raume an die Stelle der andern gesetzt werden, ohne dafs daraus für die Anschauung der mindeste Unterschied erwächst."

Wiegand, L. d. M. I. — Halle 1863. — giebt eine der gewöhnlichen Erklärungen und fügt dann die Eigenschaft hinzu, dafs jeder Teil derselben, irgendwie und irgendwo[3]) auf einen andern gelegt, vollständig ihn decke, kommt auch auf die Drehung um zwei Punkte zu sprechen und sagt schliefslich:

„Die Aufsuchung von Punkten, die in einerlei Richtung,

---

[1]) Damit wird die übliche Anschauung auf den Kopf gestellt. Es scheint jedoch mehr an der sprachlichen Unbestimmtheit des Ausdrucks zu liegen, als an einem wirklichen Fehler der Auffassung. In der ganzen vorhergehenden Auseinandersetzung spricht Thibaut genau genommen nicht von der geraden Linie, sondern von der Strecke, so dafs also erst jetzt auf den Begriff der Geraden selbst, worunter durchaus die Gerade in unendlicher Ausdehnung zu verstehen ist, eingegangen wird.

[2]) Es scheint mir, als wenn diese Erklärung sich im wesentlichen mit meiner Ansicht decke, dafs die gerade Linie die einzige sei, die sich überhaupt nur nach einer Dimension erstreckt. In den folgenden Sätzen stellt Thibaut die Umkehrbarkeit ohne weiteres als Axiom auf.

[3]) Man vergleiche das Zitat von J. H. T. Müller nebst Anmerkung.

d. h. also in einer geraden Linie liegen, bezeichnet man mit dem Ausdrucke visieren."[1])

Wolff, L. d. G. — Berlin 1830.

„Eine Linie ist entweder gerade oder krumm, ... Dies sind einfache Begriffe."

Worpitzky a. a. O.

„Axiom IX.

Hält man zwei beliebige Punkte einer Figur im Raume fest, so läfst sich dieselbe noch starr bewegen; es bleibt aber eine durch jene Punkte hindurchgehende, von den Eigenschaften der Figur unabhängige, ungeschlossene und unverzweigte Linie in Ruhe.

Definitionen.

I. Diejenige Bewegung, bei welcher ein Punkt seinen Ort nicht ändert, heifst Drehung.

II. Diejenige Linie, welche bei der Drehung einer Figur um zwei feste Punkte in Ruhe bleibt, die Drehungsaxe, heifst eine gerade Linie oder schlechthin eine Gerade."[2])

Daran schliefsen sich noch vier weitere Definitionen, vier Zusätze und ein Postulat.

[1]) Auch in dieser Erklärung wird eigentlich nur der Strahl, nicht aber die Gerade gegeben. Übrigens ist diese Hinweisung auf ein praktisches Beispiel zur Klarstellung des Begriffes recht gut und kann für den Unterricht nur empfohlen werden. Allerdings liegt gerade in diesem Beispiel mehr der Grundsatz, dafs die Gerade durch zwei Punkte völlig bestimmt ist. Zu diesem selben Beispiel fand ich die Bemerkung eines Autors, dafs man vor dem Visieren unbewufst schon die Gerade vom Auge nach dem Zielpunkte konstruiert habe. Die Entscheidung über die Richtigkeit dieser Bemerkung deckt sich mit der Beantwortung der Frage nach dem primären oder sekundären Charakter der Geraden.

[2]) Da im Vorausgehenden nur von der Drehung um einen festen Punkt die Rede war, so treten die Erwägungen des Satzes II recht unvermittelt auf. Meiner Meinung nach hätte erst auseinandergesetzt werden müssen, dafs auch bei zwei festen Punkten noch eine Drehung im Raume möglich ist. Dann aber scheint es mir viel natürlicher die Erklärung dieser Drehung auf die Gerade zu stützen, als umgekehrt die Gerade aus dieser Drehung zu entwickeln. Das liegt übrigens wohl auch unbewufst in dem Gebrauch des Wortes Drehungsaxe.

Ziegler a. a. O.

„Mit der gleichzeitigen Vorstellung zweier Punkte ist auch die der Richtung gegeben.“[1])

„Haupteigenschaften der Geraden sind:

Alle ihre Punkte liegen in derselben Richtung.

Sie ist durch zwei Punkte fixiert.

Sie giebt die kürzeste Entfernung zweier Punkte.“

Ohm, Dr. r. Elem. Math. II. — Berlin 1835.

„Die Linie ..., welche als eine gerade (auch Richtung genannt) oder als eine krumme erscheint.“

Benzenberg, Anfangsgründe. — Düsseldorf 1818.

„Was eine gerade Linie sei, ist jedem bekannt. Es ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten.“

Unger, Die Geometrie des Euklid. — Erfurt 1833. — giebt die Euklidische Erklärung, fügt aber in einer Anmerkung hinzu:

„Gerade ist ein einfacher Begriff und daher müssen alle Erklärungen der geraden Linie mifslingen. Derjenige, der nicht bereits eine deutliche Vorstellung von einer geraden Linie hat, wird durch keine Erklärung derselben eine solche erlangen. Wenn aber die richtige Vorstellung der geraden Linie vorausgeht, so wird man in jeder der mannigfachen Erklärungen, welche von derselben gewöhnlich gegeben werden, sie wieder erkennen, und man mufs daher alle Erklärungen als Erläuterungen ansehen, von welchen diejenige die beste ist, aus welcher unmittelbar weitere Folgerungen über das Wesen derselben sich ableiten lassen. Dieses ist nun bei der obigen Erklärung der Fall; aus derselben folgt unmittelbar, dafs eine gerade Linie durch zwei der Lage nach gegebene Punkte ihrer Lage nach vollkommen bestimmt ist und dafs

---

[1]) Warum nicht auch die des Abstandes?

daher zwei zusammentreffende aber nicht zusammenfallende gerade Linien sich nur in einem einzigen Punkte schneiden können.

Koppe, Planimetrie. — Essen 1868.

„Der Begriff der geraden Linie ist ein einfacher; und es ist daher weder nötig, noch möglich zu sagen, was eine gerade Linie ist.“

Ulrich, a. a. O.

„Die gerade Linie ist eine so einfache räumliche Gröfse und ursprüngliche Vorstellung des Verstandes, dafs es schwer hält, deren Begriff auf andere einfachere oder mehr bekannte Be-Begriffe zurückzuführen. Hierin liegt die Schwierigkeit, eine solche Erklärung von ihr zu geben, aus welcher ihre Konstruktion und alle Eigenschaften, welche die Geometrie von ihr in Anspruch nimmt, abgeleitet und streng bewiesen werden könnten. Die Erklärung des Euklides (I, 4), nach welcher die gerade Linie diejenige ist, „welche zwischen den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig oder auf einerlei Art liegt“, kann vielleicht so verstanden werden, dafs, wenn man sie um zwei beliebige, als unverrückbar gedachte Punkte in ihr umdreht,[1]) alle übrigen Punkte derselben ihre Lage ebenfalls nicht ändern.[2]) Wenigstens offenbaren sich in dieser Erklärung, obschon sie nicht geeignet ist, die Konstruktion der geraden Linie zu lehren, wesentliche Eigenschaften derselben, an welche die ferneren geometrischen Untersuchungen gebunden sind.“

„Die Vorstellung des Weges, den man einzuschlagen hat, um auf einer geraden Linie von einem Punkte derselben nach einem andern zu gelangen, führt zu dem Begriff der Richtung.[3]) Ohne eine entweder vorhandene oder gedachte gerade

---

[1]) Das ist aber absolut unmöglich.

[2]) Vergl. G. W. Krafft Institutiones geometriae sublimioris. Tubingae 1753. p. 2. — Sacchericus Euclides ab omni naevo vindicatus. Mediol. 1733. p. 71. — Eucl. elementa, ed. Camerar. Berol. 1824. p. 7 et 8.

[3]) Nach Ulrich ist demnach der Begriff der Geraden der primäre, derjenige der Richtung der sekundäre. Man vergl. meine Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

Linie ist keine Richtung möglich.[1]) Eine bestimmte Richtung setzt also ebenso, wie eine gerade Linie, zwei Punkte als gegeben voraus, die sie in sich aufzunehmen hat.“ ...

Wagner, L. d. e. G. — Hamburg 1874.

„Die Lage, welche ein Punkt in Bezug auf einen gegebenen Nachbarpunkt einnimmt, nennt man seine Richtung zu demselben.“

„Um dies zu verstehen, mufs man folgendes beachten: Um einen gegebenen Punkt als Hauptpunkt kann man sich eine unendlich grofse Zahl von unmittelbar angrenzenden oder Nachbarpunkten liegend denken. Jeder dieser Punkte wird in Bezug auf den Hauptpunkt eine andere Lage haben, und durch diese seine Lage (seine Richtung) von irgend einem der übrigen Punkte unterschieden sein. Nur ein Punkt von besonderer Bedeutung existiert noch; es ist derjenige, zu welchem der Hauptpunkt dieselbe Richtung besitzt, wie der besprochene zu dem Hauptpunkte. Von je zwei solchen Nachbarpunkten des Hauptpunktes sagt man, sie haben entgegengesetzte Richtung zu demselben. Geht man daher von einem zweier entgegengesetzt gerichteten Punkte zum Hauptpunkt über, dann von diesem zum andern, so behält man dieselbe Richtung bei.“

„Eine gerade Linie[2]) ist eine solche Linie, welche durch zwei in ihr liegende Punkte völlig bestimmt ist.“

„Die Gestalt der geraden Linie ist uns nun von früher her bereits so bekannt, in all unsere Vorstellungen so eingewurzelt, dafs wir uns gar nicht vorstellen können, sie sei eine andere. Wir bestimmen aber auch immer eine gerade Linie in Wirklichkeit durch zwei Punkte; denn stellen wir uns z. B. die Kante einer Treppenstufe vor, so suchen wir nach

---

[1]) Das ist eben nicht richtig. So wie ein zweiter Punkt gesetzt wird, ist die Richtung vom ersten nach dem zweiten (und umgekehrt) vorhanden, unabhängig davon, ob das Subjekt dieser Richtung durch eine wirkliche resp. gedachte Gerade Form giebt oder nicht.

[2]) Man vermifst den Übergang von den vorhergehenden Betrachtungen zu der Geraden; die folgenden Betrachtungen reihen sich ganz unvermittelt an.

ihren Endpunkten und sind nicht eher beruhigt, als bis wir zwei solche Punkte gefunden haben. Wir (ein Punkt) gehen, falls nicht Hindernisse vorliegen, mit Sicherheit in gerader Linie auf ein Haus (zweiter Punkt) los, wenn wir es vor Augen haben."

„Unter Entfernung zweier Punkte versteht man dasjenige Stück der durch sie gehenden geraden Linie, welches zwischen ihnen enthalten ist."

Das letzte Beispiel erscheint nicht besonders glücklich gewählt; es handelt sich darin schon nicht mehr um den Abstand zweier Punkte, sondern um den Abstand eines Punktes von einer Geraden: das ist aber ein neuer Begriff, von dem vorläufig, ohne erläuternde Betrachtungen, noch nicht gehandelt werden darf.

L. v. Pfeil, Zur Theorie der geraden Linie. Grunerts Archiv. 49. p. 178.

„Die gerade Linie[1]) wird in den Lehrbüchern überall als ein einfacher Begriff betrachtet und behandelt. Bekanntlich führt diese Annahme in ihren Konsequenzen auf Wahrheiten, welche man als Grundsätze hinzustellen genötigt ist, obschon eine strenge Logik ihnen diese Stellung nur widerwillig einräumt."

„Jene Auffassung der geraden Linie, als eines einfachen Begriffes, ist jedoch eine ebenso willkürliche, als unberechtigte. Schon die Verbindung des Adjektivs mit dem Substantiv, gerade Linie, drückt den zusammengesetzten Begriff aus. Gerade bezeichnet, nach dem völlig korrekten Sprachgebrauche,

---

[1]) Die folgenden Ausführungen decken sich im wesentlichen mit den meinigen; auch hier wird der sekundäre Charakter der geraden Linie betont und nachgewiesen; allerdings ist der Ausgangspunkt der Untersuchung insofern ein anderer, als der Begriff der Bewegung an die Spitze gestellt und ganz besonders hervorgehoben wird. Auch kann ich in Einzelheiten nicht völlig mit dem Verfasser übereinstimmen; so z. B. dafs Richtung und Unveränderlichkeit zwei getrennte Begriffe seien, die erst im Begriffe gerade sich verbänden, erscheint mir nicht richtig. Die Unveränderlichkeit liegt im Begriff der Richtung drin, daher man auch Ausdrücke vermeiden sollte, wie „seine Richtung ändern", statt dessen genauer gesagt werden mufs „eine andere Richtung einschlagen".

die Unveränderlichkeit einer Richtung; gerade ist also an sich selbst schon ein zusammengesetzter Begriff, enthaltend Richtung und deren Unveränderlichkeit. Man geht gerade aus, nicht rechts, nicht links.[1]) An eine Linie denkt man dabei nicht. Der Begriff Richtung und der Begriff Linie sind ganz gewifs verschieden. In der Linie liegt der Begriff der Länge, in der Richtung nicht.[2]) Sind nun schon der Begriff Richtung und der Begriff Linie verschiedene Begriffe, und ist der Begriff gerade an sich selbst ein zusammengesetzter aus Richtung und Unveränderlichkeit, so mufs der Begriff gerade Linie sogar aus den Begriffen Richtung, Unveränderlichkeit und Länge zusammengesetzt sein. Es ist mithin evident, dafs der Begriff gerade Linie, als das Produkt aus mehreren verschiedenen Begriffen, ein zusammengesetzter Begriff sein mufs,[3]) und es ist darum ein logischer Irrtum, die gerade Linie als einen einfachen Begriff zu betrachten und zu behandeln."

„Mit dieser Auffassung stimmt auch die Erfahrung überein. Es ist nicht notwendig, die Richtung durch eine gerade Linie auszudrücken; bekanntlich bedient man sich dazu auch des Kreisbogens.[4]) Eine Länge kann ebensogut an einer

---

[1]) Man vergleiche hiermit die Anwendungen von „gerade" in sittlicher Bedeutung: „Gerader Mann", „gerader Charakter". — Dann auch „gerader Kegel".

[2]) Das ist gewifs zutreffend und das punctum saliens, um das die Untersuchung sich zu drehen hat. Dafs die Linien qualitativ und quantitativ zu fassen sind, ist auch von mir schon gebührend hervorgehoben.

[3]) J. Kober, Über die Definitionen etc. in H. Z. I. p. 235: „Der Begriff „gerade" kann und braucht nicht erklärt zu werden: er fällt zusammen mit dem Begriffe „Richtung" (Nord, West u. s. w.)"

[4]) Auch hier kann ich mich mit dem Verfasser nicht einverstanden erklären. Meiner Meinung nach handelt es sich hier um eine arge Verwechslung. Da der Verfasser in den folgenden Betrachtungen auf die Bewegung näher eingeht, so hätte er zwischen fortschreitender und drehender Bewegung scharf unterscheiden müssen. Der Unterschied zwischen Richtung bei fortschreitender Bewegung und derjenigen bei drehender Bewegung hätte dann nicht identifiziert werden können. Ebensowenig zutreffend ist die folgende Bemerkung, dafs eine Länge auch durch eine krumme Linie gemessen werden könnte. Gemessen

und durch eine krumme Linie gemessen werden, als durch eine gerade, Länge und Richtung, sowie Richtung und gerade Linie stehen mithin in gar keinem notwendigen Zusammenhange."

Pfeil schliefst diese Ausführungen mit der Bemerkung, dafs die gerade Linie demnach kein einfacher Begriff sei und deshalb die gerade Linie als zusammengesetzter Begriff definiert werden müsse. An die Spitze der Betrachtung stellt er den Begriff der Bewegung[1]) als Ortsveränderung. Hierbei ergeben sich Gröfse und Richtung als einfache Begriffe. Nachdem sodann noch die genetische Definition der Körper, Flächen und Linien gegeben ist, werden folgende Erklärungen und Sätze aufgestellt:

„Eine gerade Linie ist eine solche, welche in allen ihren Teilen dieselbe Richtung hat. Oder auch:

Eine gerade Linie entsteht, wenn sich ein Punkt so bewegt, dafs er immer dieselbe Richtung beibehält."

Dazu kommen folgende Lehrsätze:

1) „Wird eine Linie gedreht, so verändert sie ihre Richtung in allen Punkten und zwar überall um gleichviel."

2) „Die Teile einer geraden Linie sind selbst gerade Linien."

3) „Berühren zwei gerade Linien einander, so fallen sie in eine zusammen."[2])

4) „Ist eine Linie vom Anfang gegen das Ende hin gerade, so ist sie es auch umgekehrt vom Ende gegen den Anfang hin."

---

werden die Längen von Linien nur mit Hülfe der Geraden resp. der Strecke, und selbst da, wo vielleicht scheinbar krumme Linien direkt verglichen werden, liegt doch unbewufst der Begriff der Geraden zu Grunde.

[1]) Hierzu wird sehr richtig bemerkt: „Ohne Annahme der Bewegung ist jede mathematische Deduktion ein Ding der Unmöglichkeit. Wie will man nur eine Linie ziehen oder verlängern, einen Kreisbogen beschreiben .... ohne Bewegung. Bewegung als blofse Ortsveränderung aufgefafst, ist aus der Geometrie nicht auszuschliefsen und sie ist darum in allen ihren Konsequenzen für die Erörterung zu benutzen.

[2]) An früherer Stelle ist erklärt, dafs sich Linien berühren, wenn sie einen Punkt gemein und an demselben gleiche Richtung haben.

5) „Wird eine gerade Linie um einen ihrer Punkte so lange gedreht, bis sie ihre frühere Richtung berührt, also in die entgegengesetzte Lage kommt, so fällt sie mit ihrer ursprünglichen Lage wieder in eine gerade Linie zusammen.“

6) „Da die gerade Linie in allen ihren Teilen, vorwärts und rückwärts betrachtet, die gleiche Richtung hat, so wird sie vorzugsweise zur Bezeichnung irgend einer Richtung angewendet.“

7) „Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.“

8) „Eine gerade Linie kann nicht in sich zurückkehrend sein.“

9) „Die gerade Linie ist die kürzeste zwischen zwei Punkten.“

Helmholtz, Pop.-wiss. Vorträge. III. Über Ursprung etc.

p. 25: „Aber in jenen ersten Elementen werden einige Sätze aufgestellt, von denen die Geometrie selbst erklärt, dafs sie nur darauf rechnen müsse, jeder, der den Sinn dieser Sätze verstehe, werde ihre Richtigkeit zugeben. Das sind die sogenannten Axiome der Geometrie. Zu diesen gehört zunächst der Satz, dafs wenn man die kürzeste Linie, die zwischen zwei Punkten gezogen werden kann, eine gerade Linie nennt, es zwischen zwei Punkten nur eine und nicht zwei verschiedene solche gerade Linie geben könne.“[1])

Bretschneider, Lehrgebäude der nied. Math. — Jena 1844.

---

[1]) Liegt dies denn nicht schon in der Anwendung des Superlativs? Bedeutet dieser nicht immer eine Einheit? Das geht doch auch schon aus dem Gebrauch des bestimmten Artikels hervor: die kürzeste Linie, nicht eine kürzeste Linie. Der Einwand, dafs auf einer Kugelfläche die entgegengesetzten Punkte durch unendlich viele kürzeste Linien verbunden gedacht werden können, ist deshalb hinfällig, weil es sich hier um einen entgegen dem Sprachgebrauch gebildeten, ganz willkürlich angenommenen, speziell mathematischen Ausdruck handelt, ähnlich dem von Helmholtz gebildeten „geradeste Linien.“

„Eine gerade Linie ist diejenige, welche, wenn man sie um zwei in ihr als fest angenommene beliebige Punkte herumdreht, keinen hohlen Raum einschliefst, sondern stets ganz in sich selbst hineinfällt."

Dieser Definition wird noch eine ausführliche Erklärung beigegeben. Dann heifst es: „Die Vorstellung der geraden Linie ist eine Grundvorstellung des menschlichen Geistes; ihre Entstehung kann daher nicht bewiesen, sondern nur nachgewiesen werden."

Die Eigenschaften der Geraden werden in Zusätzen gegeben.

Crelle, Über Parallelentheorien etc. — Berlin 1816.

„Da im Raume, durch denselben Punkt, nach allen Richtungen Linien liegen können (weil ein Punkt zugleich mit den Linienräumen, die er sondert, da ist), so bestimmen ein einzelner, oder was dasselbe ist, weniger als zwei Punkte keine Linie. Also kann eine Linie nicht in eine andere fallen, wenn beide nicht wenigstens zwei Punkte gemein haben."

„Eine Linie unterscheidet sich von der anderen durch ihre Gestalt. Daher giebt es unzählige verschiedene Linien. Man unterscheidet gerade und krumme. Eine gerade Linie ist, die je an zwei entgegengesetzten Seiten dieselbe Gestalt hat, so dafs, wenn man die eine Seite der Linie in die andere, d. h. den Flächenraum an der einen Seite in den Flächenraum an der andern Seite legt, die Grenzen beider Räume an demselben Orte im Raume bleiben."[1])

„Diese Erklärung der geraden Linie ist wieder eine wesentliche Hauptsache für alles Folgende. Sie ist, dünkt mich, genau; denn der Begriff von Seite ist ebenso ursprünglich, wie der von Gestalt und Lage. Dafs unter Seite nicht etwa ein Teil der Linie, oder eine Grenze der Länge nach, sondern Lage verstanden wird, darf nicht erinnert werden."

Auf dieser Definition baut Crelle dann in Lehrsätzen die Eigenschaften der geraden Linie auf.

---

[1]) Mir scheint, dafs man auch bei dieser Erklärung schon vorher wissen müsse, was eine Gerade ist, resp. wie man sie sich zu denken hat.

Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie. — Berlin 1826.

„Man stelle sich in einer beliebigen Fläche eine Linie und in dieser Linie zwei Punkte vor. Man lasse die beiden Punkte an demselben Orte im Raume bleiben, die Fläche aber alle Lagen annehmen, die sie annehmen kann. Bleibt die Linie, in welcher sich die beiden festen Punkte befinden, für jede beliebige Lage der Fläche an demselben Orte im Raume, so ist sie gerade.“[1])

Die Eigenschaften der geraden Linie giebt Crelle auch hier in Lehrsätzen.

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

„Man nennt eine Linie gerade oder eine Gerade, wenn alle Punkte, welche in ihr gedacht werden können, in derselben Richtung liegen, wenn sie die anfängliche Richtung immer beibehält, wie weit man in ihr auch fortgehen mag.“

„Die Gröſse einer Geraden ist bestimmt durch ihre beiden Endpunkte; die Gerade selbst heiſst die Entfernung dieser beiden Punkte.“

„Die Lage einer Geraden, ihre Richtung, wird bestimmt durch zwei Punkte, durch welche die Gerade gehen soll. Ist nur ein Punkt gegeben, so kann man durch denselben, nach den verschiedensten Richtungen hin, unendlich viele Gerade ziehen, ist aber ein zweiter Punkt bestimmt oder gegeben, so wird die Gerade, welche durch beide Punkte gehen soll, von allen übrigen ausgezeichnet, ihre Lage und Richtung ist bestimmt, und alle Geraden, welche durch dieselben Punkte gehen, fallen mit ihr zusammen, sind dieselben. Von Geraden, deren Richtungen durch dieselben Punkte bestimmt werden, kann man sagen, sie haben identische Richtungen, werden sie

---

[1]) Siehe die vorige Bemerkung. — Alle Versuche, bei der Erklärung der Geraden an Stelle der progressiven Bewegung die drehende zu setzen, müssen notwendig miſslingen, da von allen Bewegungen die progressive die einfachste ist, d. h. reine Ortsveränderung ohne einschränkende Bedingungen.

alsdann auch durch dieselben Endpunkte begrenzt, so ist auch ihre Lage identisch.“[1])

Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

„Sobald wir zwei Punkte (A und B) aufeinander beziehen, so stellen wir uns die Entfernung zwischen beiden vor, d. h. wir haben es mit einer Dimension, d. h. mit der Linie zu thun.“[2])

„Wenn wir die Abhängigkeit der Elemente einer Linie einsehen wollen, so müssen wir dieselbe entstehen lassen. Wir müssen also den Punkt A bewegen, bis er mit dem anderen B zusammentrifft. Der Weg des Punktes ist eine Linie AB. Aber es giebt unendlich viele Wege, welche der eine Punkt A einschlagen kann, um die Stelle des andern B einzunehmen. Er kann also unendlich viele Linien beschreiben. Übersehen wir alle diese Linien, so drängen sich uns die Vorstellungen von Richtung und Entfernung auf.[3]) Denn entweder strebt der bewegte Punkt A immer oder überall nach dem andern Punkte B zu oder nicht. Nur jener Fall ist bestimmt. Daher kann zunächst nur er Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchung sein. Insofern nun der Punkt A dem Punkte B unausgesetzt zustrebt, ist die entstandene Linie AB Richtung, und insofern er in jener Richtung wirklich bis B geht, ist sie Entfernung. Nennen wir also die so entstandene Linie AB eine Gerade, so haben wir die Erklärung: Die gerade Linie ist Richtung oder[4]) Entferung.“

„Wie hängen nun Richtung und Entfernung zusammen? Gehen wir von A nach B, dieselbe Richtung beibehaltend, so

---

[1]) Diese letzte Unterscheidung ist mir nicht klar. Identische Gerade — und um solche handelt es sich nach den vorhergehenden Betrachtungen — haben doch eo ipso identische Lage, ganz unabhängig von ihrer Begrenzung. Oder sollten hier nur Strecken gemeint sein? Doch wohl nicht. Übrigens sagt Arneth selbst im Anfang dieses Absatzes: „Die Lage einer Geraden, ihre Richtung, wird bestimmt.“ Wozu da diese Unterscheidung?

[2]) Hier wird nun wieder nur auf den Abstand geachtet.

[3]) Doch nicht jetzt erst bei der Vorstellung der sämtlichen Linien, sondern direkt beim Setzen zweier Punkte.

[4]) Warum nicht Richtung und Entfernung?

können wir uns über B hinaus immer wieder Punkte denken, auf welche wir zugehen, ohne unsere Richtung zu ändern. Die Gerade als Richtung läuft also nach der einen Seite ins Unendliche. Wir können aber auch von B nach A gehen. Die Richtung BA ist der Richtung AB entgegengesetzt, aber beide verhalten sich zu einander, dafs durch die eine die andere gegeben ist. So wie die Richtung AB ins Unendliche läuft, so läuft auch die Richtung BA ins Unendliche, d. h. die Gerade als Richtung durchläuft den unendlichen Raum. Mithin kann sie als Richtung nicht zugleich die Entfernung vorstellen, denn diese mufs immer zwischen zwei bestimmten Punkten gedacht werden. Als Entfernung jedoch ist die Gerade auch Ausdruck der Richtung."[1])

Hieran schliefsen sich die bekannten Axiome der Geraden, die in folgender Fassung noch einmal bestimmter formuliert werden: „Hiermit haben wir auch die Abhängigkeit der Elemente der Geraden gefunden. Dieselben sind Punkte. Die Punkte einer Geraden sind unendlich viel. Aber durch zwei sind alle übrigen bestimmt und zwar:

1) „Wenn die Gerade Richtung ist, so sind alle ihre Punkte durch zwei beliebige Punkte bestimmt.

2) Wenn die Gerade Entfernung ist, so ist sie durch die zwei Punkte bestimmt, welche nur auf einer Seite Punkte der Geraden neben sich haben, d. h. durch die Endpunkte."

Alsdann wird die Gerade als ein Postulat bei zwei gegebenen Punkten und zwar in ihrer Unendlichkeit bestimmt. — In dieser ganzen Betrachtung ist Entfernung noch nicht in dem Sinne von Abstand genommen. Darauf kommt Bartholomäi erst durch die Betrachtung der krummen Linie, „die auch Entfernung ist." Jedoch gilt:

1) „Nur die Gerade ist bestimmter Ausdruck der Entfernung, nicht die krumme Linie.

2) Die Gröfse dieser Entfernung ist vollkommen

---

[1]) Meiner Meinung nach ist die Gerade beides zugleich, Richtung und Abstand. Auch wenn keine bestimmten Punkte gedacht werden, so liegt schon in der Möglichkeit, sie jederzeit zu setzen, der der Geraden inhärente Begriff des Abstandes.

bestimmt, während sie bei anderen Linien bald gröfser, bald kleiner ausfällt.

3) Die Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten."

---

v. Forstner, Grundrifs. — Berlin 1826.

„Stellt man sich zwei Punkte vor, so sind zwischen diesen unendlich viele Linien möglich, die bald länger, bald kürzer sein werden. Unter allen diesen Linien kann aber nur eine die kürzeste sein und diese heifst die gerade Linie."[1])

Hieran knüpfen sich dann in Grund- und Zusätzen die Eigenschaften der Geraden. Der Begriff der Richtung wird ganz vermieden, an seiner Stelle wird von Lage gesprochen.

Francoeur, Vollständiger Lehrkurs. — 1843.

„Die Linie heifst eine Gerade, wenn kein Punkt derselben, insofern als man sie sich um zwei in ihr angenommene Punkte drehen läfst, eine Verrückung erleidet."

Nachdem sodann die weiteren Eigenschaften der Geraden besprochen sind, heifst es in einer Anmerkung: „Die gerade Linie ist ein einfacher Begriff; durch Erklärung eine deutlichere Vorstellung von der geraden Linie verlangen zu wollen, ist eine schwierige Sache."

Frankenbach, Lehrbuch. — Liegnitz 1889.

„Eine Linie heifst gerade, wenn ein beliebiger Teil derselben unter allen Umständen mit der übrigen Linie zusammenfällt, sobald zwei Punkte des Teils mit zwei Punkten der Linie irgendwo zusammenfallen."

Frantz, Die Philosophie der Mathematik.[2]) — Leipzig 1842.

---

[1]) Man vergleiche meine Bemerkung zu dem Zitat von Helmholtz.

[2]) Dieses Zitat ist nur als Beweis gegeben für die unglaublichen Leistungen auf dem Gebiete der mathematischen Philosophie, die man der Hegelschen Schule zu verdanken hat. Es sei übrigens nicht unerwähnt, dafs die metamathematischen Untersuchungen von vielen nicht günstiger beurteilt werden.

p. 68: „Wie sich uns jetzt der Raum bestimmt hat, ist er die Negation seiner als des Aufsereinanders. Dieses ist selbst der Raum, so ist er in sich selbst die Negation seiner, der Punkt. Als der Punkt ist er nicht, oder vielmehr er ist nur die Abstraktion. Die Negation des Aufsereinanders ist jetzt eben des Raumes Bestimmung, nicht sein abstraktes Nicht; es ist seine Negation, und damit selbst räumlich, die gerade Linie, — die erste Dimension. Dafs diese Linie gerade sei, liegt darin, dafs sie nur die Räumlichkeit des Punktes zur Bestimmung hat, somit einfach bestimmt ist."

„Indem sich der Raum als die gerade Linie gesetzt hat, unterscheidet er sich darin von sich selbst. Er hat sich als Linie gerichtet in sich selbst."

Und so orakelt Frantz noch weiter.[1])

Helmes, Elementar-Mathematik. II. — Hanau 1874.

p. 4: „Von allen Linien ist ausgezeichnet durch die Einfachheit und Ursprünglichkeit ihrer Vorstellung die gerade Linie oder die Gerade. Sie läfst sich nicht definieren oder unter einen noch höheren Begriff stellen, aber was sie von allen anderen ... unterscheidet, läfst sich bestimmt aussprechen und zum Bewufstsein bringen."

1) „Zwischen zwei Punkten können wir uns immer nur eine gerade, aber unendlich viele krumme Linien denken."

Dabei wird in Verlauf der Betrachtung auf die Drehung, wenn zwei Punkte fest sind, näher eingegangen; aufserdem auf die Eigenschaft der Kongruenz (der Möglichkeit der Deckung). Es heifst dann: „Die Ursprünglichkeit und Gemeinsamkeit der Vorstellung von der geraden Linie beruht auf den gleich ursprünglichen und gemeinsamen Vorstellungen der Richtung und der Entfernung von einem Punkte im Raume nach einem anderen, als deren Ausdruck und räumliche Darstellung wir

---

[1]) Und dieser Hegelianer sagt in der Vorrede: „.... Die Philosophie, im Bewufstsein ihres weit höheren Wissens, hat sich von der Mathematik gleichgültig, um nicht zu sagen verächtlich, abgewandt." Wäre ihr dieser Bearbeiter doch abgewandt geblieben!

uns eben die gerade Linie zwischen diesen beiden Punkten denken.“[1])

2) Die Richtung wird durch die Beispiele des Lichtstrahls,[2]) des Weges eines fallenden Körpers, des durch ein Gewicht gespannten Fadens erläutert und gesagt, „dafs hierdurch diese gemeinsame Vorstellung von gerader Linie und Richtung begründet und befestigt wird.“

3) Dafs die andere Grundvorstellung der Entfernung zwar für die Verbindung zweier Punkte durch mehrere gerade Linien streng und einfach bewiesen werden kann, nicht aber in Bezug auf eine krumme Verbindungslinie, wird zugegeben.[3])

Metternich, Vollständige Theorie der Parallellinien. — Mainz 1815.

p. 38: „Die geometrische Linie, als einfachste Ausdehnung blofs in die Länge, ist ein abgezogener Begriff, und wird in dieser Eigenschaft als Grenze der geometrischen Fläche .... durch Schlüsse, nicht aber durch eine willkürliche Erklärung erkannt .... Bei diesen Schlüssen ist der Verstand unbekümmert um die wirkliche und abgesonderte Darstellung (Ver-

---

[1]) Helmes geht also von derselben Ansicht aus wie ich; wenn es auch nicht direkt ausgesprochen wird, so liegt doch in der Fassung dieser Betrachtungen, dafs die Gerade als sekundärer Begriff gedacht wird.

[2]) Plato definiert: „Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ“ .... deren innere Punkte den Endpunkten im Wege (im Lichte) stehen.“

[3]) Im XII. Abschnitt wird der Grundsatz aufgestellt: „Die Sehne ist kleiner als der zugehörige Bogen.“ Dazu bemerkt Helmes in einer Anmerkung: „In einer allgemeinen Fassung, wie sie zur Benutzung für krumme Linien überhaupt notwendig sind, spricht Archimedes obigen Grundsatz als Voraussetzung aus. Seine Richtigkeit zu veranschaulichen, ist rätlich (vgl. Legendre IV, 9; Aschenborn, Geom. § 22; Heis und Eschweiler, Geom. III. 18); aber ein Beweis ist solche Veranschaulichung nicht.“ Es wird dann noch auf einen „sehr beachtenswerten“ Versuch des Prof. K. Hattendorf, die Lücke auszufüllen, aufmerksam gemacht. — Es ist mir unerfindlich, warum Helmes plötzlich Skrupel aufsteigen, während er doch oben die Entfernung als einen mit der Richtung gleich ursprünglichen und gemeinsamen Begriff (so würde doch besser statt Vorstellung zu sagen sein) bezeichnet.

sinnlichung oder Verzeichnung) dieser Begrenzungen am Raume. Alle Konstruktionen von Punkten etc. sind im Grunde nichts anderes, als Sinnbilder dieser geometrischen Gegenstände; auch will man durch diese Bilder nur die Stelle bezeichnen, wo man sich die geometrischen Punkte etc. als vorhanden denken soll.“

„Man kann nur den Begriff der geraden Linie aussprechen, aber nicht weiter erklären, weil er keine andere Merkmale als gerade Richtung in sich begreift, und dieses Merkmal ist nichts anderes als gerade Linie.“

„Mit einem Worte: Der Begriff von der geometrischen Linie wird durch Schlüsse erworben, aber der von der geraden Linie mufs sozusagen in die Geometrie mitgebracht werden.“

Mit Recht wird alsdann hervorgehoben, dafs die genetische Erklärung der Geraden durch Bewegung eine erschlichene ist, denn wenn man sage, die gerade Linie entstehe durch Bewegung nach einer Richtung, so sei damit die gerade Linie schon als früher vorhanden gekennzeichnet und auf ihr bewege sich der Punkt.[1]) Dagegen wird die Eigenschaft der geraden Linie, die kürzeste zwischen zwei Punkten zu sein, als des Beweises bedürftig bezeichnet.

Es wird alsdann auf die Technik der geraden Linie, wie sich Metternich ausdrückt, ausführlich eingegangen d. h. auf die Versinnlichung und zwar erstens durch den Lichtstrahl und zweitens durch einen gespannten Faden.

Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823.

p. 11: „Zwei Linien können auf unzählige Arten so aneinander gestützt werden, dafs zwei Punkte der einen mit zwei Punkten der andern zusammenfallen.“[2])

---

[1]) Man darf diese Erzeugung der Vorstellung der Geraden nicht verwechseln mit der Zusammenfassung aller von einem Punkte aus nach derselben Richtung liegenden Punkte in der Geraden.

[2]) Ich mufs offen gestehen, dafs mir der Sinn dieser Auseinandersetzung nicht klar geworden ist, da ich nicht wufste, welche Bedeutung der Ausdruck „aneinander stützen“ hat.

Wenn aber zwei Linien bei allen solchen Lagen nicht allein in diesen zwei Punkten, sondern auch in allen übrigen Punkten einander decken, so heifsen sie gerade Linien."

„Anmerkung. Ob eine Linie gerade sei, kann also nur durch eine andere Linie erkannt werden. Daher ist es unmöglich, sie unabhängig für sich zu erklären." [1])

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente etc.

Nach der philosophischen Bestimmung der den Begriff der Geraden bildenden Denkvorgänge, die sich auf die unmittelbare Verbindung zweier Elemente im Denken stützen, heifst es: „Die gerade Linie ist identisch mit dem Begriff der kürzesten, weil beide Attribute hierbei nichts anderes besagen als die logische Forderung „zwei Elemente (Punkte) unmittelbar im Denken zu verbinden." Diese unmittelbare Verbindung im Nebeneinander kann nun nach den beiden komplementären Möglichkeiten heifsen:

unmittelbare = unvermittelte Richtung.

unmittelbare = unvermittelte Ausdehnung.

Der Begriff gerade Linie bedeutet also zugleich identische Richtung und kürzeste Entfernung, und diese beiden Begriffe konstruieren ein und dasselbe Gebilde, so lange die kürzeste Entfernung keinen weiteren Bedingungen unterworfen wird.[2]) Verschiedene gerade Linien, wie sie von der Hypergeometrie postuliert werden, sind eben solche Alogismen, wie verschiedene Geradheiten, verschiedene Sätze der Identität."

„Die gerade Linie ist einesteils ein Gröfsenbegriff, weil sie nach der Entfernung ihrer Grenzen, nach der Ausdehnung gemessen werden kann. Als bestimmte Richtung ist

---

[1]) Dies scheint mir eine gründliche Verkennung der wirklichen Fragen zu sein, die hier in Betracht kommen.

[2]) Darnach könnte man die Ebene auch definieren als diejenige Fläche, auf (in) welcher die kürzeste Entfernung mit der kürzesten Entfernung im Raume identisch ist; oder um mich eines Helmholtzschen Ausdrucks zu bedienen, in welcher die geradeste Linie die gerade Linie ist.

sie aber auch ein qualitativer Begriff; denn „Richtung und Geradheit" kann nicht vermehrt oder vermindert werden. Eine bestimmte Gerade ist demnach eine Gröfse von bestimmter Qualität, verschieden von der Qualität einer jeden anderen Richtung. Ebenso wie in der allgemeinen Kombinatorik zeigt sich also auch in der Geometrie, dafs schon das einfachste Gebilde die beiden generellen Begriffskategorien „Quantität, Qualität" nicht allein zuläfst, sondern peremptorisch fordert."[1])

In quantitativer Hinsicht findet die einfache Ausdehnung ihre Deutung in der arithmetischen Zahl.

Steiner, Systematische Entwicklung etc. Gesammelte Werke. I. p. 237:

„In der Geraden ist eine unzählige Menge unmittelbar aufeinander folgender Punkte denkbar, die sich, von irgend einem derselben ausgehend, nach zwei entgegengesetzten Seiten hin ins Unendliche erstrecken."

Voraus geht die Bemerkung: „Die in der Geometrie erforderlichen Grundvorstellungen sind: der Raum, die Ebene, die Gerade und der Punkt."

Tellkampf, Vorschule der Mathematik. — Berlin 1847.

„Unter allen denkbaren Bewegungen eines Punktes ist die einfachste die in gerader Linie. Es ist unmöglich, von einer solchen eine Erklärung zu geben, wodurch ihr Begriff auf einfachere Vorstellungen zurückgeführt würde, da sie zu den unmittelbar gegebenen Grundvorstellungen der Geometrie gehört."

Es folgen dann die bekannten Sätze über die gerade Linie, die „in der ursprünglichen Vorstellung der geraden Linie liegen."

---

[1]) Wie sehr ich mit den Ausführungen des Verfassers einverstanden bin, brauche ich wohl kaum besonders hervorzuheben. Man vergleiche meine Ausführungen am Anfange dieses Kapitels.

Becker, Friedr., Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. — Hanau 1870. — Progr.

„Die Bewegung eines Punktes kann nach einer bestimmten Stelle hin[1]) gerichtet sein; der entstehende Weg (Linie) ist alsdann von einfachster Gestalt und heifst eine gerade Linie (Gerade). Das Bildungsgesetz einer Geraden liegt also in der Unveränderlichkeit ihrer Richtung.[2]) Zu ihrer Bestimmung bedarf es also eines ihrer Punkte und ihrer Richtung, welche auch durch einen zweiten Punkt, den sie durchlaufen soll, gegeben sein kann."

Es wird dann noch auf die Drehung bei zwei festen Punkten und die Kongruenz der Geraden eingegangen, sowie die Bestimmung der Entfernung gegeben.

Beckmann, Die geometrischen Grundgebilde etc. — Trier 1879.

Punkt, Gerade und Ebene werden als „absolut einfache, gewissermafsen atomistische und daher auch undefinierbare Grundformen oder Elemente" bezeichnet.

Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1885.

„An die dritte Erklärung (Euklids) schliefst sich die Definition der Geraden, als einer Linie, welche zwischen den in ihr befindlichen Punkten auf einerlei Art liegt.[3]) Wie indes

---

[1]) D. h. nach einem zweiten Punkt.

[2]) Man vergleiche das Zitat aus Grunerts Archiv (v. Pfeil, Zur Theorie der geraden Linie).

[3]) Zu dieser Definition bemerkt J. Kober in „Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe." H. Z. I., p. 230: „Der Begriff „gerade" hat mit dem „Liegen zwischen zwei Punkten" zunächst gar nichts zu thun; der Gedankengang, der beide verknüpft, durchläuft erst den Begriff der „Richtung" (die dann allerdings durch den zweiten Punkt bestimmt wird). Daher giebt diese Erklärung nicht den ursprünglichen Begriff der Geraden, sondern nur eine Ableitung, eine Folge desselben. (Eine Definition soll aber den ursprünglichen Begriff geben.) — Der Schüler, der nicht schon eine richtige Vorstellung der geraden Linie hat, kann sie aus dieser Definition nimmermehr erlangen." S. f. S.

das „auf einerlei Art“ (ἐξ ἴσου) zu verstehen sei und wie wir uns darüber Gewifsheit verschaffen können, dafs eine Linie wirklich diese Eigenschaft besitzt, wird uns freilich nicht mitgeteilt. Jedenfalls müfsten wir doch die Formen aller Linien, die in der Ebene oder im Raume möglich sind, untersuchen, um entscheiden zu können, ob es überhaupt eine und nur eine Linie giebt, der die vorgeschriebene Eigenschaft zukommt.“

Schon Proclus habe richtig erkannt, dafs dieselbe Eigenschaft auch sämtlichen Kreisen und den Schraubenlinien oder cylindrischen Spiralen zukomme. Aufserdem ändere sich der Abstand zweier Punkte innerhalb der Linie[1]) nicht, wenn die Gerade ohne Dehnung gebogen werde. Auch die Definitionen des Plato „die Gerade ist eine Linie, deren Inneres durch das Äufserste verdeckt wird“ und des Archimedes „die Gerade ist die kürzeste unter denen, die gleiche Grenzen haben“ werden verworfen, die letztere auch deshalb, weil sie „einen neuen, noch nicht erklärten Begriff, welcher der reinen Geometrie oder der Geometrie der Lage fremd ist,“ einführe. Es werden dann eine Reihe der gebräuchlichen Definitionen der Geraden angeführt, auch diejenige, die sich auf den Begriff der Richtung[2]) stützt. Beez bemerkt dazu: „Ob der Begriff der Richtung

---

„Nicht einmal als Beweismittel ist sie durchaus brauchbar,“ denn es sei nicht korrekt, sich den Schenkel eines Winkels als Verbindungslinie zweier Punkte zu denken. Auch sei es ein Zeichen der Schwäche dieser Definition, dafs in der Folge die ausdrückliche Forderung gestellt würde, dafs eine gerade Linie verlängert werden könne, was „für jedes Kind von selbst verständlich“ sei.

Auf die Folgen dieser Erklärung für die Definition von Winkeln und Parallelen wird hingewiesen.

[1]) Der Zusatz „innerhalb der Linie“ fügt dem Begriffe des Abstandes eine Bedingung, also ein neues, fremdes Moment zu: ähnlich, wie wenn ein Punkt auf einer (krummen) Fläche sich in der Richtnng auf einen andern Punkt bewegen soll. In beiden Fällen werden die reinen Grundbegriffe der Richtung und des Abstandes getrübt. Man mufs daher bei dem Gebrauche dieser bedingten Begriffe sehr sorgfältig darauf achten, dafs sie von den Grundbegriffen wohl zu unterscheiden sind.

[2]) Es finden sich hierzu folgende Litteraturangaben: Wundt, Logik I. p. 451; A. Krause, Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der geometrischen Axiome p. 80; Schlömilchs Zeitschrift Bd. XIV. Litteraturzeitung p. 46.

aber ein so klarer und präziser ist, dafs man durch ihn den Begriff Gerade deutlich erklären könne, ist mir sehr fraglich.“ Aus den angeführten Beispielen geht hervor, dafs die Begriffe der fortschreitenden und der drehenden Bewegung nicht genügend auseinander gehalten werden, so dafs es nicht verwunderlich ist, wenn Beez zu dem Resultat kommt, „nicht die Richtung definiere die Gerade, sondern umgekehrt die Gerade die Richtung.“

Donadt, Das mathematische Raumproblem. — Leipzig 1881.

„Die Konstruktion, welche zwei entgegengesetzte Richtungen von übereinstimmender Lage zusammenfafst, heifst Gerade.“

Nachdem dann sechs Axiome aufgestellt sind, deren drittes lautet: „Jede Gerade ist durch zwei Punkte bestimmt oder zwischen zwei Punkten ist nur eine Gerade möglich oder zwei Gerade können keinen Raum einschliefsen“ wird als siebentes hinzugefügt: „Die zwei Punkte verbindende Gerade mifst deren Entfernung.“[1])

Kaiser, Über einige Hauptpunkte des geometrischen Unterrichts. — Remscheid 1881.

„Die gröfsten Schwierigkeiten erheben sich, sobald man es versucht, den Begriff der geraden Linie in eine bündige Definition zu fassen. Hier scheinen in der That diejenigen Mathematiker das Richtigste zu treffen, welche die Vorstellung von der Geraden für so ursprünglich und einfach halten, dafs sie sich in einfachere Elemente nicht zergliedern läfst.“

Kaiser kritisiert dann den Versuch von Duda, den dieser in seinem Programm, Die fundamentalen Lehrsätze von der Geraden etc., Brieg 1879, gemacht hat, den Begriff der Geraden mit Hülfe von ineinander liegenden Rotationskörpern zu erklären (die Gerade bleibt schliefslich beim Abdrechseln eines Körpers übrig); er bemerkt dazu — und das gilt nicht

---

[1]) Das Axiom enthält noch mehr, ist aber hier nur soweit zitiert, als es für die vorliegende Frage von Bedeutung ist.

nur von diesem Versuch —: „Und wenn wirklich die Vorstellung der geraden Linie gerettet worden ist, so war sie nicht nur während, sondern bereits vor der Abdrehung in einer solchen Klarheit und Intensität vorhanden, dafs sie sich durch die Betrachtung jenes in nichts zerfliefsenden Vorgangs nicht wieder vernichten liefs.“ — Die Zurückführung des Begriffs auf den Lichtstrahl wird aus guten Gründen verworfen und dafür als allein richtiges Erklärungsprinzip der Begriff der Richtung angegeben, von dem Kaiser sagt: „Ich halte denselben für so klar und fest in der Anschauung begründet, dafs er, ohne näher definiert zu werden, der genetischen Erklärung der Geraden zu Grunde gelegt werden kann.“ Ebenso wird der mit der Geraden verbundene Begriff der kürzesten Entfernung als ein „aus der reinen Anschauung fliefsendes Axiom“ bezeichnet.

Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempen 1879.

„Diejenigen Linien, welche ihrer Ausdehnung nach in jeder Lage so aufeinander gelegt werden können, dafs sie in eine Linie zusammenfallen, heifsen gerade Linien.“ „Jede Linie, welche die unendliche Ebene in zwei gleiche, einander in jeder Beziehung entsprechende Teile teilt, heifst eine gerade Linie oder insofern sie beliebig (unendlich) lang gedacht wird, kurzweg Gerade.“

Korneck bemerkt dazu: „Dafs obige Definition der Geraden, ebenso wie die entsprechende der Ebene, unanfechtbar ist, läfst sich durch Widerlegung der dagegen gemachten Einwände leicht zeigen.“

Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852.

„Eine gerade Linie kann auf doppelte Art betrachtet werden. Insofern dieselbe durch zwei Punkte begrenzt gedacht wird, betrachten wir die Linie als die Entfernung beider Punkte und sprechen dann von der Länge der Linie. Sieht man dagegen von jeder Begrenzung der geraden Linie ab, so gelangt man zur Vorstellung der Richtung.“

Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid.[1])

Die Übersetzung selbst kann übergangen werden, da Proklos nur die üblichen Definitionen angiebt und dann eine, wie mir scheint, nicht ganz hierher gehörige Untersuchung über das Verhältnis der Geraden zu anderen Linien anstellt. In seiner Besprechung der Definition sagt Majer: „Diese (die Erklärung der Euklidischen Definition) giebt Proklos dahin ab, die Gerade sei nach Euklid die Linie, welche eine Ausdehnung habe gleich dem Zwischenraum zwischen den Punkten auf ihr ... Wie aber in den Worten Euklids dies liegen soll, ist mir, wie vielen anderen, nicht klar. Schon in alter Zeit war man sich der Schwierigkeit, eine befriedigende Definition der Geraden zu geben, vollkommen bewufst; daher die Menge der Definitionen, die sich schon im Altertum vorfindet, sowie die verschiedenen Versuche den Worten des Meisters einen befriedigenden Sinn unterzulegen. Aber schon Savilius lectiones tresdecim, S. 77 sagt: Hanc definitionem mihi liceat bona cum venia omnium interpretum tam veterum quam recentiorum non intelligere; seiner Ansicht sind auch Camerer, Pfleiderer und Hauber. (Cf. hierüber Thienemann, Geometr. Abhandlung über Erklärungen etc. Göttingen 1862.)“[2])

Es heifst dann, Borellius (Euclid. rest. p. 4) habe recht, dafs man nicht wisse, was der Abstand zweier Punkte sei, denn der Begriff des Abstandes zweier Punkte setze den Begriff der geraden Linie voraus.[3]) Die bekannte Drehungs-Erklärung habe Thienemann nach Saccherius gegeben. Die bekannte Platonische Erklärung wird als gute Veranschaulichung gelobt.

H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. — Berlin 1889.

Es wird von der Drehung um einen Punkt ausgegangen,

---

[1]) Man vergleiche: Friedlein, Untersuchung der sogenannten Definitionen Heros, in H. Z. II p. 181 und das Zitat aus Beez.

[2]) Man vergleiche das Zitat aus Pfleiderer.

[3]) Ich habe die entgegengesetzte Ansicht. Auch glaube ich, dafs man recht gut weifs, was der Abstand zweier Punkte sei.

dann diejenige betrachtet, bei der zwei Punkte festgehalten werden. Dabei behalten noch unzählig viele andere Punkte ihre Lage unverändert bei; dieselben folgen ohne Unterbrechung aufeinander und bilden zusammen eine Linie.[1]) „Ein Punkt *P*, der von einem der festen Punkte anfangend diese Linie beschreiben würde, müfste alle ihre Punkte durchlaufen, und zwar jeden nur ein einzigesmal. Den Inbegriff aller dieser Punkte nennen wir gerade Linie oder Gerade (Drehungsaxe).“

Müller sagt: „Anschauung und Begriff der geraden Linie sind hiermit entwickelt und ihre ersten Eigenschaften abgeleitet, ohne dafs zu ihrer Erklärung Grundsätze zu Hülfe genommen werden mufsten.“[2]) Richtung und Abstand werden dann noch in einigen folgenden Erläuterungen beiläufig erwähnt.

Polster, Geometrie der Ebene. — Würzburg 1878.

„Eine Linie, welche zwischen jeden beliebigen zwei in ihr liegenden Punkten eine einzige mögliche Lage hat, heifst gerade Linie.“

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie.

„Axiom I. In unserem Raume existiert eine Linie, welche mit jeder ihrer Kopien höchstens einen Punkt gemein hat, falls sie nicht ganz mit derselben zusammenfällt: Diese Linie wird Gerade genannt.“

Sie ist ein Elementargebilde.

Durch eine eingehende Untersuchung von fünf über eine

---

[1]) Die stetige Folge der Punkte, die ihre Lage unverändert beibehalten, ist doch nicht aus dem Begriff der Drehung ersichtlich. Gerade diese Stelle ist recht geeignet, darauf hinzuweisen, dafs der Begriff der festen Linie, um die die Drehung erfolgt, vor dem Begriff der Drehung da ist, d. h. eben daraus erkannt wird, dafs durch zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist.

[2]) Man vergleiche die vorige Anmerkung. Ist es denn kein Grundsatz in der obigen Erklärung, dafs unzählig viele Punkte fest bleiben? und ist es kein Grundsatz, dafs diese unzählig vielen Punkte stetig aufeinander folgen? Also zwei Grundsätze auf einmal.

mögliche Elementarlinie aufgestellten Sätzen kommt man zu dem Axiom: „Alle etwa existierenden Elementarlinien sind Kopien voneinander."

„Über dieses 'etwa' kommt man nicht hinaus, falls man nicht durch ein Axiom die Existenz des Gebildes feststellt. Das Axiom I., welches unter dem Namen 'Gerade' die Elementarlinie einführt, ist nicht mehr und nicht weniger als der Ausdruck unserer Überzeugung von dem Vorhandensein einer solchen Elementarlinie."[1])

Hiermit seien die Betrachtungen über die Gerade abgeschlossen.

Die fünf Kapitel des vorliegenden Bandes haben sich mit der Behandlung der geometrischen Grundlagen beschäftigt. Verfasser hofft, zur Klarlegung derselben teils durch die kritische Übersicht über das vorhandene Material, teils durch seine eigenen Untersuchungen einen brauchbaren Beitrag geliefert zu haben und übergiebt sein Buch der nachsichtigen Beurteilung der mathematischen Lehrerwelt mit dem Bewufstsein, überall Vollständigkeit wenigstens angestrebt zu haben. Inwieweit der Gedanke, eine derartige kritische Zusammenstellung der Litteratur zu geben, Berechtigung habe, darüber wird der Erfolg zu entscheiden haben; jedenfalls halte ich es nicht für überflüssig, auch hier noch einmal darauf hinzuweisen, dafs die Zitate gerade bei den Grundbegriffen besonders zahlreich und ausführlich gegeben werden mufsten. Selbstverständlich wird bei anderen Fragen z. B. bei der Behandlung der Kongruenz sich das Zitatenbeiwerk auf ein Minimum beschränken können.

---

[1]) Dazu bemerkt Wernicke in einer Anmerkung: „So sagt auch Bolyai, dafs es sich nicht nur darum handle, die geometrischen Begriffe scharf zu bestimmen, sondern auch darum, ihr Sein im Raume zu beweisen. (Vergl. Frischauf, Elemente 34.)" Bei früherer Gelegenheit schon habe ich darauf hingewiesen, dafs es nach meiner Ansicht ganz ohne Bedeutung ist — und ich konnte auch gewichtige Stimmen in gleichem Sinne anführen — eine Untersuchung anzustellen, ob es in Wirklichkeit derartige Gebilde giebt oder nicht. Die Grundlagen können rein hypothetisch sein in Bezug auf ihre Existenz.

Der zweite Band wird im allgemeinen folgenden Inhalt haben: I. Richtung und Abstand; Lage von Punkten, Geraden und Kreisen in ihren gegenseitigen Beziehungen. — Maſsbeziehungen. — II. Parallelenaxiom. — III. Winkel. — IV. Geometrische Hülfsbegriffe, als da sind z. B. Kongruenz; Bewegung; Dimension; Begriff; Definition; Beweis; Erklärung; Forderung; Lehrsatz; Grundsatz; Gestalt; Gröſse; Lage; Figur; Geometrischer Ort; Symmetrie; Beweis etc. — V. Methode.

Alphabetisches Verzeichnis der zitierten Werke.

I. Kapitel.

Der Raum.

Seite

Bartholomäi, Zehn Vorlesungen über Philosophie der Mathematik. — Jena 1860 123
Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie. — Zürich 1870 154
Becker, Elemente auf neuer Grundlage. — Berlin 1877 123
Becker, Lehrbuch der Elementargeometrie. — Berlin 1879 . . . 124
Behl, Darstellung der Planimetrie nach induktiver Methode. — Hildesheim 1886 125
Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844 141
Brewer, Lehrbuch der Geometrie und ebenen Trigonometrie. — Düsseldorf 1822 125
Crelle, Über Parallelentheorien. — Berlin 1816 142
Donadt, Das mathematische Raumproblem. — Leipzig 1881 . . 149
Erdmann, Die Axiome der Geometrie. — Leipzig 1877. 126
Frischauf, Elemente der Geometrie. — Graz 1870. 131
von Forstner, Grundriſs der Elemente der reinen Mathematik. Berlin 1826 155
Helmholtz, Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. — Göttinger Nachrichten 1868. No. 9 (Seite 193) . . . 155
Helmholtz, Über den Ursprung der geometrischen Axiome. — Pop.-wiss. Vorträge. — Braunschweig 1876 . . . . 128 u. 141
Klügel, Wörterbuch 140
Kries, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Jena 1817 131
Leesekamp, Die Elemente der ebenen Geometrie. — Kassel 1879 133
E. Müller, Elemente der Geometrie. — Braunschweig 1869 . . . 133
J. Müller, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Bremen 1870 134
Nagel, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ulm 1873 135
v. Pfeil, Zur Theorie der geraden Linie. — Grunerts Archiv. Bd. 49 (Seite 178) 140
Rausenberger, Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene. — Leipzig 1887 135

Seite

Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. — Göttinger Abhandlungen 1867 129
Rosanes, Über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume. — Breslau 1871 . . . . 128 u. 147
Schlegel, Über den sogenannten vierdimensionalen Raum. — Berlin 1889 142
Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Mafses. — Leipzig 1874 136
Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878 157
Snell, Lehrbuch der geradlinigten Planimetrie. — Leipzig 1857 . 137
Sonnenburg, Lehrbuch der gesamten Elementargeometrie. — Bremen 1868 138
Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836 . . 139
Wagner, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Hamburg 1874 . . 139
Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Mafses. — Braunschweig 1887 140
Worpitzky, Elemente der Mathematik. III. — Berlin 1874 . . . 138

II. Kapitel.

Geometrie.

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840 166
Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851 167
J. K. Becker, Elemente 163
J. K. Becker, Lehrbuch 163
Bretschneider 167
Brewer 163
Crelle, Über Parallelentheorien 168
Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie. — Berlin 1826 . 169
Ebensperger, Leitfaden der ebenen Geometrie. — Nürnberg 1850 163
Fenkner, Lehrbuch der Geometrie. — Braunschweig 1888 . . . 169
F. Fischer, Anfangsgründe der Mathematik. II. — Leipzig 1887 164
v. Forstner 169
Francoeur, Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik. — Bern 1843 169
Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik. I. — Liegnitz 1889 . 170
J. Gilles, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Heidelberg 1877 . 164
Grunert, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Brandenburg 1870 170
Helmholtz, Pop.-wiss. Vorträge. III. 167
Klügel, Wörterbuch 166
Lambert, Organon 166
Legendre, Elemente der Geometrie. ed. Crelle. — Berlin 1844 . 164
J. Müller 164
Schindler, Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883 164

Seite
Schmitz-Dumont 168
Seeger, Elemente der Geometrie. — Wismar 1887 165
Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822 . 165
Ulrich 165
Ziegler, Grundrifs der ebenen Geometrie. — Landshut 1881 . . 165

III. Kapitel.

Raumgebilde.

Arneth 240
August, Lehrbuch der Mathematik. I. — Berlin 1852 190
Baltzer, Elemente der Mathematik. — Leipzig 1874 193
Bartholomäi, Vorlesungen 195
Bartholomäi, Planimetrie 241
Beck, Die ebene Geometrie nach Legendre. — Bern 1842 . . . 196
Becker, J. K., Elemente 196
Becker, J. K., Lehrbuch 198
Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiet etc.. 244
Becker, F., Die ebene Geometrie in neuer Anordnung. — Hanau 1870 233
Beckmann, Die geometrischen Grundgebilde etc. — Trier . . . 239
Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen i/V. 249
Behl 198
Boymann, Lehrbuch der Mathematik. I. — Köln u. Neufs 1877 . 242
Bretschneider . . . . 173 u. 243
Brewer 199
Crelle, Über Parallelentheorien. — Berlin 1816 243
Crelle, Lehrbuch 251
Dronke, Die Elemente der ebenen Geometrie. — M.-Gladbach . 200
Ebensperger 200
Euklid, Elemente. — ed. Dippe. — Halle 200
Fabian, Lehrbuch der Mathematik. — Lemberg 1876 203
Féaux, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Paderborn 1882 204
Fenkner 231
Focke und Crafs, Lehrbuch der Geometrie. — München 1878 . 233
v. Forstner 254
Francoeur 253
Frankenbach 256
Frischauf, Elemente der Geometrie. — Graz 1870. 204
Gaufs, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. — Bunzlau 1885 . 205
Gernerth, Grundlehren der ebenen Geometrie. — Wien 1857 . . 205
Gilles 206
Grunert 256
Heger, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. — Breslau 1882 257
Heinze, Elementar-Geometrie. — Berlin 1877 207

Seite

Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie. — Köln 1867 . 231
Helmes, Die Elementarmathematik. II. — Hannover 1874 . . . 257
Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Leipzig 1881 207
Hoch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Halle 1884 208
Hoffmann, J. C. V., Vorschule der Geometrie. — Halle 1874 . . 208
J. J. J. Hoffmann, Geometrische Anschauungslehre. — Mainz 1839 228
Kästner, Anfangsgründe etc. — Wien 1788 230
Kambly, Die Elementar-Mathematik. II. — Breslau 1884 210
Kober, Leitfaden der ebenen Geometrie 210
Köstler, Vorschule der Geometrie. — Halle 1887 211
Köstler, Leitfaden der ebenen Geometrie. — Halle 1889 211
Kommerell, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Tübingen 1882 211
Koppe, Die Planimetrie. — Essen 1885 231
Kries 211
Kröger, Leitfaden für den Geometrie-Unterricht. — Hamburg 1886 212
Kruse, Elemente der Geometrie. I. — Berlin 1875 212
Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851 212
Leesekamp 213
Legendre (Crelle) 213
Lieber und von Lühmann, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. I. — Berlin 1877 213
Liese, Angewandte Elementar-Mathematik. I. — Berlin 1875 . . 214
Löser, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Weinheim 1882 . 232
Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. — Berlin 1874 . 214
Menger, Grundlehren der Geometrie. — Wien 1881 214
Milinowski, Die Geometrie für Gymnasien. — Leipzig 1881 . . 214
Mink, Lehrbuch der Geometrie. — Elberfeld 1879 214
E. Müller 214
H. Müller, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1874 . . 216
J. Müller 216
J. H. T. Müller, Lehrbuch der Mathematik. — Halle 1844 . . . 217
Nagel 217
Ohm, Die reine Elementar-Mathematik. — Berlin 1835 228
Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823 259
v. Pfeil 239
Pfleiderer, Scholien zu Euklids Elementen. — Stuttgart 1827 . 217
Rausenberger 218
Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885 219
Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht. — Berlin 1886 219
Reidt, Elemente. II. — Berlin 1888 221
Rottock, Lehrbuch der Planimetrie. — Leipzig 1888 221
Rummer, Lehrbuch der Elementargeometrie. — Heidelberg 1869 221
Sadebeck, Elemente der Geometrie. — Breslau 1872 221
Schindler 221

Seite
Schlegel, Raumlehre. — Leipzig 1872 222
Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik. II. — Wolfenbüttel 1879 223
Schlömilch 224
Schmitz-Dumont. 248
Schurig 224
Schwabe und Schmidt 224
Schweder 224
Snell. 224
Sonnenburg 224
Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Potsdam 1873 . . 225
Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1888 225
Stegmann, Grundlehre der ebenen Geometrie. — Kempten 1886 225
Sturm, J. B., Die Grundanschauungen der Mathematik 247
von Swinden, Elemente der Geometrie. ed. Jacobi. — Jena 1834 225
Thibaut 225
Ulrich 233
Unger, Die Geometrie des Euklid. — Erfurt 1833 231
Uth, Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. — Kassel 1881 226
Wernicke 236
Wiegand, Lehrbuch der Mathematik. I. — Halle 1863 226
Wohlgemuth, Lehrbuch der Geometrie. — Libau 1877. 226
Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830 226
Worpitzky 227
Wunder, Lehrbuch der Mathematik. III. — Leipzig 1840. . . . 228
Ziegler. 228

IV. Kapitel.

Die Ebene.

Arneth 288
August. 288
Baltzer 271
Bartholomäi, Planimetrie 288
Beck 289
F. Becker 285
J. K. Becker, Lehrbuch 289
J. K. Becker, Elemente 273
Beez 295
Boymann. 289
Bretschneider 286
Crelle, Zur Theorie der Ebene 262
Crelle, Zur Parallelentheorie 286
Crelle, Lehrbuch 287
Deahna, Demonstratio theorematis, esse superficiem planam . . 272
Dronke. 274

Seite
Ebensperger 275
Erdmann 275
Euklid 276
Fabian 276
F. Fischer 289
Frankenbach 289
Frantz, Die Philosophie der Mathematik. — Leipzig 1842 . . . 290
Frischauf, Absolute Geometrie 291
Funck, Das Euklidische System der Geometrie der Ebene. — Berlin 1864 292
Gaufs 272
Grunert 287
Heinze, C. 293
Helmes 293
Helmholtz, Pop.-wiss. Vorträge. II. 2. 285
Klügel, Wörterbuch 284
Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempen 1879 298
Kruse 276
Kunze 277
Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid. — Stuttgart 1881 299
Martini, Die Krümmung ebener Kurven. — Rottweil 1877 . . . 299
Menger 294
Milinowski 277
E. Müller 278
J. Müller 278
J. H. T. Müller 294
H. Müller, Über den ersten planimetr. Unterricht. — Berlin 1889 298
Paucker 295
Pfleiderer 278
Rausenberger 279
Schindler 280
Schlegel, Raumlehre 281
Schlegel, Lehrbuch 282
Schmitz-Dumont 295
v. Swinden 282
Thibaut 283
Ulrich 284
Wernicke 298
Wolff 284

V. Kapitel.

Die Gerade.

Arneth 346
August 309

Seite
Baltzer 310
Bartholomäi, Vorlesungen 311
Bartholomäi, Planimetrie 347
Beck 311
F. Becker 355
J. C. Becker, Elemente 311
J. C. Becker, Lehrbuch 313
Beckmann 355
Beez 355
Behl 314
Benzenberg, Anfangsgründe. — Düsseldorf 1818 338
Bretschneider 344
Crelle, Parallelentheorieen 345
Crelle, Lehrbuch 346
Donadt 357
Fabian 314
Féaux 315
v. Forstner 349
Francoeur 349
Frankenbach 349
Frantz 349
Gaufs 315
Heger 315
Heinze 316
Helmes 350
Helmholtz, Vorträge. III 344
Henrici und Treutlein 316
Hoch 316
Hoffmann 317
Junghans, Lehrbuch der el. Geometrie. — Berlin 1879 317
Kaiser, Über einige Hauptpunkte des geometr. Unterrichts. — Remscheidt 1881 357
Kästner, Anfangsgründe 325
Kästner, Abhandlungen. III 326
Kästner, Abhandlungen. I 327
Klügel 327
Kober 318
Köstler, Leitfaden 318
Kommerell 318
Koppe 339
Korneck 358
Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852 358
Kries 318
Kruse 319

Seite

Kunze 320
Legendre. 321
Lieber und von Lühmann 321
Liese. 322
Majer 359
Metternich, Vollständige Theorie der Parallellinien. — Mainz 1815 351
Milinowski 322
Mink. 322
E. Müller 322
Hub. Müller 324
H. Müller 359
J. H. T. Müller. 324
Ohm 338
Paucker 352
Petersen, Lehrbuch. ed. Fischer-Benzon. — Kopenhagen 1881 . 325
v. Pfeil. 341
Pfleiderer 325
Polster, Geometrie der Ebene. — Würzburg 1878 360
Rausenberger 331
Recknagel 332
Reidt, Anleitung 332
Reidt, Elemente. 332
Schindler 332
Schlegel, Raumlehre 333
Schlegel, Elemente 333
Schmitz-Dumont 353
Snell. 333
Spitz. 333
Steiner, Gesammelte Werke. I. p. 237 354
v. Swinden. 334
Tellkampf, Vorschule der Mathematik. — Berlin 1847. 354
Thibaut 335
Ulrich 339
Unger 338
Wagner 340
Wernicke 360
Wiegand. 336
Wolf 326
Wolff 337
Worpitzky 337
Ziegler. 338

